



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Gabrielle Resende Oliveira

**Controle robusto de sistemas com saltos markovianos
com conhecimento apenas das probabilidades
estacionárias**

Campinas

2020

Gabrielle Resende Oliveira

**Controle robusto de sistemas com saltos markovianos
com conhecimento apenas das probabilidades
estacionárias**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Engenharia Elétrica, na Área da Automação.

Orientador: Prof. Dr. Alim Pedro de Castro Gonçalves

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pela aluna Gabrielle Resende Oliveira, e orientada pelo Prof. Dr. Alim Pedro de Castro Gonçalves.

Campinas

2020

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

OL4c Oliveira, Gabrielle Resende, 1987-
Controle robusto de sistemas com saltos markovianos com conhecimento apenas das probabilidades estacionárias / Gabrielle Resende Oliveira. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: Alim Pedro de Castro Gonçalves.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Markov, Cadeias de. 2. Sistemas de controle por realimentação. 3. Processo estocástico. 4. Probabilidade de transição. 5. Incerteza . I. Gonçalves, Alim Pedro de Castro, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Robust control of Markov jump systems with knowledge only stationary probabilities

Palavras-chave em inglês:

Markov chain

Feedback control systems

Stochastic process

Transition probability

Uncertainty

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestra em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

Alim Pedro de Castro Gonçalves

Cristiane Néspoli de Oliveira

Matheus Souza

Data de defesa: 20-02-2020

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-6235-2197>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/0413593583150083>

COMISSÃO JULGADORA - DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Candidata: Gabrielle Resende Oliveira RA: 191699

Data da Defesa: 20 de fevereiro de 2020

Título da Dissertação: “Controle robusto de sistemas com saltos markovianos com conhecimento apenas das probabilidades estacionárias”.

Prof. Dr. Alim Pedro de Castro Gonçalves (Presidente)

Profa. Dra. Cristiane Néspoli de Oliveira

Prof. Dr. Matheus Souza

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no SIGA (Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese) e na Secretaria de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

Dedico esta tese a minha querida família e aos meus amigos.

Agradecimentos

Agradeço

A minha família, em especial aos meus pais Evaristo e Sebastiana, pela educação, pelo constante apoio e por tudo que fizeram e ainda fazem por mim. Aos meus irmãos Rosiane, Luiz, Laurianne, Elisson e o meu querido sobrinho Gustavo pelo apoio e motivação.

Ao professor Alim Gonçalves pela orientação, paciência, por sanar as minhas dúvidas, pelas valiosas sugestões e estímulos e por ter me dado a oportunidade de cursar o mestrado na FEEC/Unicamp. Agradeço também aos professores Matheus Souza e Ricardo Oliveira.

Aos colegas do laboratório LE 12, principalmente o Lucas e os “Rafaéis” pela convivência, pelas conversas e por terem ajudado nas minhas dúvidas durante os meus estudos.

Ao Léo, Rafa, Josy, José e tantos outros amigos que fiz durante a minha estadia na Unicamp, pelo carinho e afeto, pela força e amizade durante todo o período de mestrado e agora para toda a vida.

Aos professores Matheus Souza e Cristiane Néspoli por terem aceitado participar da banca de avaliação, pelas valiosas sugestões e por contribuírem para um trabalho melhor.

A CAPES por financiar a minha pesquisa e ao SAE pela ajuda financeira nos momentos difíceis.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - 88882.329366/2019-01.

Muita gratidão a todos vocês.

“Caminhante, não há caminho, o caminho se faz ao caminhar.”

Antônio Machado (Poeta espanhol)

Resumo

A modelagem para sistemas com saltos markovianos a tempo contínuo ou a tempo discreto permite lidar com mudanças bruscas nos parâmetros de suas estruturas. Neste contexto, a presente pesquisa visa estudar o projeto robusto às incertezas nos parâmetros dos saltos da cadeia de Markov. Estes saltos são determinados, no caso de sistemas a tempo contínuo, pelas taxas de transição e, para sistemas a tempo discreto, pelas probabilidades de transição.

Neste trabalho, supõe-se que conhecemos apenas as probabilidades estacionárias da cadeia de Markov associada para a caracterização das incertezas nos parâmetros de transição. O objetivo deste trabalho é calcular o conjunto das taxas ou de probabilidades de transição que acarretam as mesmas probabilidades estacionárias, e finalmente aplicar estes conceitos ao projeto de controladores e filtros robustos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

Palavras-chaves: Sistemas com saltos markovianos, Controle por realimentação de estado, Estado estacionário, Matriz das taxas de transição incerta, Matriz de probabilidades de transição incerta.

Abstract

The modeling for systems with markovian jumps in continuous or discrete time allows dealing with sudden changes in the parameters of their structures. In this context, the present research studies the robust design to uncertainty in the Markov chain jump parameters for this kind of systems. These jumps are determined by transition rates and transition probabilities for continuous and discrete time systems, respectively.

In this work, it is assumed that only the stationary probabilities of the Markov chain are precisely known. Thus, this research aims to describe the set of transition rates or probabilities that lead to the same stationary probabilities and finally apply these concepts to robust design of controllers and filters \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ .

Keywords: Markov jump linear systems, State-feedback control, Stationary state, Matrix of uncertain transition rates, Matrix of uncertain transition probability.

Sumário

1	Introdução	12
1.1	Motivação	14
1.2	Organização da dissertação	15
1.3	Notação	15
2	Cadeias de Markov	17
2.1	Processos markovianos	17
2.2	Cadeia de Markov	18
2.2.1	Cadeias de Markov a tempo discreto	19
2.2.2	Cadeias de Markov a tempo contínuo	20
2.2.3	Matriz das taxas de transição e o tempo de permanência	21
3	Estado estacionário	24
3.1	Cadeias de Markov a tempo discreto	24
3.2	Cadeias de Markov a tempo contínuo	25
3.3	Classificação das cadeias de Markov	27
3.3.1	Cadeias de Markov a tempo discreto	27
3.3.1.1	Estado estacionário	29
3.3.2	Cadeias de Markov a tempo contínuo	31
3.3.2.1	Estado estacionário	32
3.3.3	Exemplo	33
4	Sistemas com saltos markovianos	35
4.1	Sistemas lineares com saltos	35
4.1.1	Estabilidade	36
4.1.1.1	Sistemas com saltos markovianos a tempo contínuo	36
4.1.1.2	Sistemas com saltos markovianos a tempo discreto	37
4.1.2	Normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞	38
4.1.2.1	Normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ a tempo contínuo	38
4.1.2.2	Normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ a tempo discreto	40
4.1.3	Síntese de realimentação de estado	42
4.1.3.1	Síntese de realimentação de estado \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ a tempo contínuo	42
4.1.3.2	Síntese de realimentação de estado \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ a tempo discreto	44
4.1.4	Filtragem	45
4.1.4.1	Filtragem \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ a tempo contínuo	46
4.1.4.2	Filtragem \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ a tempo discreto	49
4.1.5	Sistemas com saltos markovianos e matrizes das taxas ou de probabilidades de transição incertas	51
4.1.6	Exemplos	52

4.1.6.1	Realimentação de estado a tempo contínuo com matriz das taxas incerta	53
4.1.6.2	Realimentação de estado a tempo discreto com matriz de probabilidades incerta	54
5	Caracterização dos vértices do politopo	57
5.1	Transições, probabilidades estacionárias e politopo convexo	57
5.2	Conjunto de matrizes das taxas de transição Γ	63
5.2.1	Exemplo 1 - Caso 2	63
5.2.2	Exemplo 2 - Caso 3	64
5.3	Conjunto de matrizes de probabilidades \wp	64
5.3.1	Exemplo 3 - Caso 2	64
5.3.2	Exemplo 4 - Caso 3	65
5.4	Análise dos vértices	66
6	Aplicações	70
6.1	Grua industrial	70
6.2	Sistema massa-mola-amortecedor	75
6.3	Aeronave não tripulada	81
7	Conclusões	90
7.1	Trabalhos futuros	90
	Referências	92
	Apêndices	96
	APÊNDICE A Trabalhos submetidos pela autora	97

1 Introdução

Diversos sistemas dinâmicos são inerentemente susceptíveis a, mudanças abruptas em suas estruturas devido, por exemplo a, falhas em componentes, alteração do ponto de operação para plantas não lineares e a perturbações ambientais repentinas, entre outros. Isso acontece, por exemplo, em sistemas de elevação e movimentação de cargas como guindastes ou gruas industriais, em sistemas de controle de aviões, em manipuladores robóticos, estruturas flexíveis de grande porte para estações espaciais (tais como antenas, aparatos solares, etc), onde a falha de um atuador ou sensor pode ser uma ocorrência comum, (Nascimento, 2003). Na área médica, esse cenário é considerado, por exemplo, no desenvolvimento de técnicas digitais para o diagnóstico automático de doenças do coração a partir de eletrocardiogramas, nos quais mudanças abruptas no ritmo do coração são parâmetros importantes. Além dessas situações, sistemas dinâmicos com mudanças abruptas foram também utilizados para estudar problemas em economia, sistemas de potência, meio ambiente, sistemas integrados de redes de comunicações, reatores nucleares, etc, (Nascimento, 2003).

Uma abordagem para lidar com esse cenário, e que tem despertado bastante interesse, tem sido aquela em que essas mudanças podem ser caracterizadas através de uma cadeia de Markov com espaço de estado contável. Esses sistemas, em particular para o modelo linear, são também conhecidos na literatura como sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos, em inglês, *Markov jump linear systems* ou MJLS, a tempo contínuo ou a tempo discreto, e constituem uma classe apropriada para modelar, sistemas que estão sujeitos a fenômenos abruptos e são vistos por diversos pesquisadores como uma opção para projetar sistemas de controle tolerantes à falha, (Oliveira, 2019).

O modelo para a classe de sistemas MJLS é composto de vários subsistemas com diferentes estados da cadeia ou também denominados nesta dissertação de modos de operação. O salto entre estes modos é governado por uma variável aleatória que evolui de acordo com uma cadeia de Markov associada a uma matriz de probabilidades de transição para o caso discreto. No caso contínuo, a cadeia está associada a uma matriz das taxas de transição.

Atualmente, existem inúmeros trabalhos que buscam estabelecer técnicas de controle e filtragem de sistemas lineares com parâmetros sujeitos a saltos markovianos tanto a tempo contínuo quanto a tempo discreto. Podemos citar os livros (Costa *et al.*, 2005), (Yin; Zhang, 2005) para sistemas a tempo discreto e (Yin; Zhang, 2012), (Costa *et al.*, 2013) para sistemas a tempo contínuo, que trazem resultados importantes, diferentes aplicações e um número significativo de referências.

Na literatura, existem trabalhos que abordam MJLS a tempo contínuo, tais como a dissertação de mestrado (Farias, 1998) que explora a síntese de controladores e filtros.

Na publicação (Farias *et al.*, 2000) é discutido o controle por realimentação de saída. No artigo (Todorov; Fragoso, 2008), discute-se o controle de realimentação \mathcal{H}_∞ via LMIs. Em (Todorov; Fragoso, 2010) discute-se o controle robusto com realimentação de saída com cadeias de Markov infinitas. Por outro lado, para sistemas markovianos a tempo discreto com probabilidades conhecidas temos o artigo (Val *et al.*, 2002) que apresenta o controle por realimentação de estado \mathcal{H}_2 com observação incompleta dos modos da cadeia e com observação por *cluster*. Na dissertação de mestrado (Gonçalves, 2006) discute estratégias para a síntese de controle por realimentação de estado \mathcal{H}_2 sem a necessidade de observação dos modos da cadeia. A publicação (Fioravanti *et al.*, 2008) discute a filtragem \mathcal{H}_2 . Em (Costa; Marques, 2008) é apresentado o controle robusto \mathcal{H}_2 . Na dissertação (Oliveira, 2014) é abordada a realimentação de estado \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ e problemas de filtragem. O trabalho (Carvalho *et al.*, 2018) apresenta o filtro misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de detecção de falhas para MJLS.

Nos problemas tradicionais de projeto para esta classe de sistemas é comum considerar que as taxas ou as probabilidades de transição que regem a cadeia de Markov associada são perfeitamente conhecidas. Um desafio interessante é o projeto robusto à incerteza nestes parâmetros. Na tese de doutorado (Gonçalves, 2009) é apresentado o projeto de controladores dinâmicos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ por realimentação dinâmica de saída e filtragem com disponibilidade do modo da cadeia de Markov e com matriz de probabilidades de transição parcialmente conhecida. Na tese de doutorado (Todorov, 2011) é proposta a realimentação de estado e realimentação dinâmica de saída para MJLS a tempo contínuo com taxas incertas. Na dissertação de mestrado (Cardeliquio, 2014) é apresentado o projeto de realimentação de estado, realimentação dinâmica de saída e filtragem \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para MJLS a tempo contínuo com taxas incertas, porém pertencem a um intervalo.

Nas publicações para sistemas MJLS a tempo discreto, temos a referência (Zhang; Boukas, 2008) que trabalha com o problema de filtragem com conhecimento de alguns elementos da matriz de probabilidades. O artigo (Shen; Yang, 2012) apresenta o projeto de filtros \mathcal{H}_2 com conhecimento parcial da matriz de probabilidades de transição. Em (Gonçalves *et al.*, 2011) e (Gonçalves *et al.*, 2012) foram propostos projetos de filtros, controladores por realimentação de estado considerando a matriz de probabilidades incerta, porém pertencente a intervalos de incerteza, respectivamente. Em (Fioravanti *et al.*, 2013) apresenta o projeto de controladores dinâmicos de saída com alguns elementos incertos na matriz de probabilidades.

Por sua vez, nas publicações para MJLS a tempo contínuo (Dong; Yang, 2007) trabalha com o controle por realimentação de estado \mathcal{H}_2 com taxas parcialmente conhecidas, porém com limites conhecidos. Nos trabalhos de (Cardeliquio *et al.*, 2014a), (Cardeliquio *et al.*, 2014b) e (Morais *et al.*, 2015) foram apresentados a realimentação de estado, a realimentação dinâmica de saída e caso de filtragem \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ com taxas incertas, mas pertencem a um intervalo dado, respectivamente. Em (Cheng *et al.*, 2016) é abordada a filtragem \mathcal{H}_∞ com incertas nas taxas de transição.

Neste contexto, a presente pesquisa estuda o projeto robusto às incertezas paramétricas nas grandezas relacionadas com os saltos na cadeia de Markov, ou melhor, trabalhamos com a indefinição nas taxas de transição, ou nas probabilidades de transição.

Nesta dissertação, vamos assumir que se conheça com precisão somente as probabilidades estacionárias da cadeia de Markov associada. Assim, o intuito é caracterizar o conjunto das taxas ou de probabilidades de transição que definem as mesmas probabilidades estacionárias.

O conjunto das taxas ou probabilidades pode ser estimado por análise bayesiana conforme (Schroer; Noé, 2013). No entanto, nesta dissertação mostramos que esta caracterização pode ser realizada por técnicas enumerativas baseadas em programação linear. Verificamos que o conjunto das taxas ou de probabilidades é um politopo convexo, fato que permite projetar controladores e filtros \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ robustos as essas matrizes das taxas ou de probabilidades.

1.1 Motivação

Algumas aplicações e resultados relacionados com os projetos de controle e filtragem para MJLS assumem que as taxas ou probabilidades de transição entre os modos markovianos são completamente conhecidas. Entretanto, em situações práticas, obter informações precisas sobre essas probabilidades podem não ser uma tarefa simples. Dessa forma, apenas valores estimados dessas taxas estão disponíveis e essas incertezas podem gerar instabilidades ou, no mínimo, degradar o desempenho do sistema da mesma forma que ocorre quando há incertezas nas matrizes da representação em espaço de estado da planta (Cardeliquio, 2014).

Neste contexto, caracterizar a matriz das taxas ou de probabilidades por intuição, ou até mesmo pela medição pode não ser uma maneira eficiente, pois ainda não se consegue ter clareza das probabilidades envolvidas, principalmente quando lidamos com taxas ou probabilidades incertas. Portanto, assumindo ou estimando o vetor estacionário pode ser mais fácil de se chegar a precisão, pois o vetor de probabilidades estacionário está relacionado a uma família de saltos de transição, assim garantindo a estabilidade dessas probabilidades.

Na dissertação, apresentamos algumas contribuições para a teoria de MJLS. O método proposto computa o conjunto das taxas ou de probabilidades de transição que definem as mesmas distribuições de probabilidades estacionárias. Finalmente aplicamos estes conceitos ao projeto clássico de controladores por realimentação de estado e filtros robustos relativos ao desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , tanto para o sistema com saltos a tempo contínuo quanto a tempo discreto.

1.2 Organização da dissertação

Este trabalho está organizado da seguinte forma. O presente capítulo apresenta uma introdução aos sistemas lineares com saltos markovianos, a motivação e consequentemente os objetivos desta dissertação.

O Capítulo 2 conceitua as cadeias de Markov, a diferença entre uma cadeia de Markov a tempo discreto e contínuo também é discutida.

No Capítulo 3, tratamos a questão da estacionaridade e a classificação das cadeias de Markov tanto a tempo discreto quanto a tempo contínuo. O estudo do estado estacionário das cadeias de Markov é fundamental para o desenvolvimento dos resultados deste trabalho.

No Capítulo 4, apresentamos em particular a definição matemática dos sistemas lineares com saltos markovianos, além dos conceitos de estabilidade e de normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . São mostrados os teoremas já estabelecidos através de desigualdades matriciais lineares chamados, em inglês, *Linear Matrix Inequalities* ou LMIs, que permitem projetar controladores e filtros robustos. Também é apresentado sistemas com saltos markovianos com taxas ou probabilidades incertas.

No Capítulo 5, apresentamos o resultado principal desta pesquisa. É mostrada a caracterização das taxas ou probabilidades de transição usando para isso os resultados ilustrados no Capítulo 3 e a definição de soluções básicas para restrições lineares.

No Capítulo 6, aplicamos a técnica desenvolvida em projetos de controle robusto por realimentação de estado a tempo contínuo em uma grua industrial e no sistema massa-mola-amortecedor. Também, apresentamos o projeto de controle para um veículo aéreo não tripulado para o caso discreto. São mostrados os resultados das simulações comparando os ganhos obtidos. Por último, apresentamos as conclusões desta dissertação e as propostas de trabalhos futuros decorrentes da pesquisa desenvolvida.

1.3 Notação

Nesta dissertação, todas as equações estão numeradas facilitando a leitura de equações não citadas. Da notação, letras maiúsculas denotam matrizes e minúsculas denotam vetores. Letras gregas minúsculas são utilizadas na representação de escalares. A operação da transposição para matrizes e vetores é indicada por (\top) . O operador traço para matrizes quadradas é denotado $tr(\cdot)$. Quando as matrizes são representadas por blocos, caso sejam simétricas, por simplicidade omitimos alguns termos, ou seja, $\begin{bmatrix} A & \bullet \\ B & C \end{bmatrix}$ é o mesmo que $\begin{bmatrix} A & B^\top \\ B & C \end{bmatrix}$. O conjunto dos números naturais é representado por \mathbb{N} e \mathbb{R} denota o conjunto dos números reais. O conjunto dos primeiros N números naturais é representado por \mathbb{K} , isto

é $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, N\}$. O intervalo de números reais maiores ou iguais a zero é dado por $\mathbb{I} = [0, \infty)$. A matriz das taxas de transição é dada por Λ e o conjunto convexo politópico definido por probabilidades estacionárias conhecidas é Γ enquanto Π é a matriz de probabilidades de transição e o conjunto politópico é dado por \wp . Além disso, vetores de dimensão n , pertencem a \mathbb{R}^n e o espaço das matrizes $m \times n$ é representado por $\mathbb{R}^{m \times n}$. Vamos escrever p_{ij}^n para a probabilidade do estado de uma cadeia de Markov partindo de i chegar a j depois de n etapas. A norma de um vetor é representada por $\|\cdot\|$. O operador $\mathcal{E}\{\cdot\}$ denota a esperança matemática. A norma ao quadrado de uma trajetória $\mathcal{E}(t)$, definida para todo $t \geq 0$, e denotada por $\|\mathcal{E}\|_2^2$ é definida como $\int_0^\infty \mathcal{E}(t)^\top \mathcal{E}(t) dt$. O conjunto de todas as trajetórias de $\mathcal{E}(t)$ tais que $\|\mathcal{E}\|_2^2 < \infty$ é chamado de \mathcal{L}_{c_2} . A norma ao quadrado de uma trajetória $\mathcal{E}(k)$, definida para todo $k \in \mathbb{K}$, e denotada por $\|\mathcal{E}\|_2^2$ é definida como $\sum_{k=0}^\infty \mathcal{E}(k)^\top \mathcal{E}(k)$. O conjunto de todas as trajetórias de $\mathcal{E}(k)$ tal que $\|\mathcal{E}\|_2^2 < \infty$ é chamado de \mathcal{L}_{d_2} . Para facilitar a apresentação, as seguintes notações são usadas alternativamente, para $\theta(t) = i \in \mathbb{K}$, por exemplo, $A(\theta(t))$ é equivalente a A_i . A inversa da matriz quadrada X , quando existe, é representada por X^{-1} . A notação H_e representa a hermitiana de uma matriz, ou seja, $H_e(X) = X^\top + X$. Fim de exemplo é indicado por \blacklozenge .

2 Cadeias de Markov

Ao longo deste capítulo apresentamos a revisão dos principais conceitos de cadeias de Markov utilizados nesta pesquisa. As definições e resultados foram retirados de (Garcia, 2008), que pode ser consultado para maiores detalhes.

2.1 Processos markovianos

O comportamento de uma variável aleatória é descrito através de uma medida de probabilidade. Modelos em que um determinado sinal ou função evolui no tempo de maneira probabilística são chamados de processos estocásticos. Um processo estocástico ou aleatório é definido como uma coleção de variáveis aleatórias $X(t)$. A denominação $X(t) = i$ afirma que o processo está no modo i no tempo t , onde o índice t percorre um determinado conjunto \mathbb{T} . Um processo aleatório é dito discreto se $X(t)$ assumir valores em um conjunto contável \mathbb{X} , se $X(t)$ assumir valores dentro de um intervalo real o processo aleatório é denominado contínuo.

Um processo estocástico é dito em tempo discreto se o conjunto \mathbb{T} for discreto e, por outro lado, se o conjunto \mathbb{T} possuir valores dentro de um intervalo real, então o processo é chamado de processo estocástico a tempo contínuo.

Nesta dissertação, vamos abordar um tipo especial de processo estocástico, chamado de processo de Markov, que foi idealizado pelo matemático russo Andrei Andreevich Markov. Em termos gerais, um processo estocástico X é um processo markoviano se a evolução futura do processo é condicionalmente independente do passado, isto é, se para tempos arbitrários $t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1}$, temos

$$\text{Prob}[X(t_{k+1}) = x_{k+1} \mid X(t_k) = x_k, \dots, X(t_1) = x_1] = \text{Prob}[X(t_{k+1}) = x_{k+1} \mid X(t_k) = x_k], \quad (2.1)$$

onde Prob indica a probabilidade condicional e t_k se refere ao tempo presente, t_{k+1} é o tempo futuro. Note que as informações dos valores passados do modo são irrelevantes, apenas o valor do processo no tempo presente é relevante para sua evolução, por isso, dizemos que o processo de Markov é um processo sem memória. Especificamente, os processos de Markov para os quais $X(t)$ assume valores discretos tem probabilidade definida por

$$\text{Prob}[a < X(t_{k+1}) \leq b \mid X(t_k) = x_k, \dots, X(t_1) = x_1] = \text{Prob}[a < X(t_{k+1}) \leq b \mid X(t_k) = x_k], \quad (2.2)$$

no qual os termos a e b pertencem ao conjunto \mathbb{X} inteiro. Se $X(t)$ assumir valores em um intervalo contínuo, a propriedade de Markov será representada pela função de densidade de probabilidade f , como representado a seguir

$$f_{X(t_{k+1})}(X_{k+1} | X(t_k) = x_k, \dots, X(t_1) = x_1) = f_{X(t_{k+1})}(X_{k+1} | X(t_k) = x_k). \quad (2.3)$$

Um caso peculiar de processo markoviano é dado pelas chamadas cadeias de Markov, que ocorrem quando o espaço de estados \mathbb{X} é enumerável. Particularmente vamos tratar com cadeias finitas na próxima seção.

Exemplos do uso de processos de Markov podem ser encontrados em todas as ciências biológicas, físicas e sociais, bem como nos negócios, economia e nas engenharias, (Silveira Júnior, 2014).

2.2 Cadeia de Markov

Cadeia de Markov é um processo markoviano onde o espaço de estados \mathbb{X} é discreto. Neste trabalho nos concentramos em cadeias de Markov que assumem valores em um conjunto finito, vamos denotá-lo por \mathbb{K} e chamamos N o número de elementos deste conjunto. A definição a seguir foi retirada de (Ross, 2010).

Definição 1:

Seja um processo de Markov e suponha que, sempre que o processo estiver no modo i , exista uma probabilidade fixa p_{ij} de que ele estará em seguida no modo j , isto é

$$p_{ij} = \text{Prob}[X_{k+1} = j | X_k = i], \quad (2.4)$$

para todos os modos i, j e para todo $k \geq 0$. Tal processo markoviano é conhecido como uma cadeia de Markov.

O valor p_{ij} representa a probabilidade de que o processo, quando no modo i , faça uma transição para o modo j . Naturalmente, essas probabilidades são não negativas, ou seja

$$p_{ij} \geq 0 \quad i, j \in \mathbb{K}. \quad (2.5)$$

As cadeias de Markov podem ser classificadas como cadeias em tempo discreto ou em tempo contínuo. Para cadeias em tempo discreto, a matriz de probabilidades de transição é constante. Como veremos a seguir, para as cadeias em tempo contínuo, a matriz de

probabilidades de transição é variante no tempo. Neste caso, usamos a matriz das taxas de transição Λ . Já para matriz de probabilidades de transição utilizamos o símbolo Π .

O diagrama de transição de estados é uma forma de representar uma cadeia de Markov feita através de um grafo, o qual identifica os modos do processo estocástico e suas probabilidades de transição, conforme ilustrado no dígrafo a seguir.

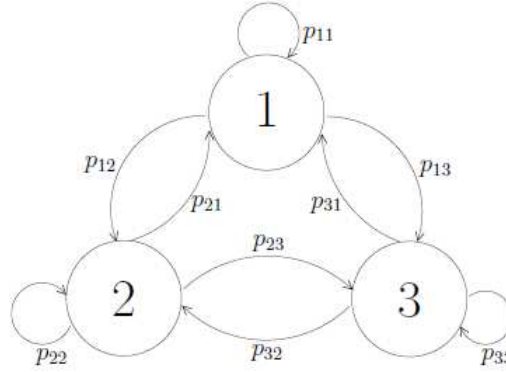


Figura 1 – Cadeia de Markov com três modos.

No caso do diagrama acima temos três modos, as setas indicam os saltos com as suas respectivas probabilidades de transição.

2.2.1 Cadeias de Markov a tempo discreto

Cadeias de Markov em tempo discreto são aquelas em que as transições ocorrem em instantes definidos de tempo. Para especificar este tipo de cadeia, definimos o espaço de estados $\mathbb{K} \subset \mathbb{N}$, a probabilidade do modo inicial $\pi_{0i} = \text{Prob}[X_0 = i]$, para $i \in \mathbb{K}$ e as probabilidades de transição são contantes em relação ao tempo, isto é $p_{ij} = \text{Prob}[X_{k+1} = j \mid X_k = i]$, $\forall k \in \mathbb{N}$, onde i representa o modo atual e j o próximo modo.

Neste caso, dizemos que X_k tem probabilidades de transição homogêneas ou o mesmo que as probabilidades de transição não mudam ao longo do tempo. Essa cadeia é completamente especificada pelas probabilidades iniciais π_{0i} e pela matriz de transição de estados de uma etapa.

A matriz Π para o caso discreto é chamada de matriz de probabilidades de transição. Como a cadeia de Markov tem um conjunto finito de modos, por hipótese, então Π será uma matriz quadrada $N \times N$, não negativa com as somatórias das linhas iguais a 1, ou seja

$$\sum_{j \in \mathbb{K}} p_{ij} = \sum_{j \in \mathbb{K}} \text{Prob}[X_{k+1} = j \mid X_k = i] = 1, \quad (2.6)$$

em qualquer instante inteiro k e para todo $i \in \mathbb{K}$.

Em outras palavras, a matriz de probabilidades deve satisfazer as restrições usuais de probabilidade, isto é

$$p_{ij} \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j \in \mathbb{K}} p_{ij} = 1, \quad \forall (i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}. \quad (2.7)$$

2.2.2 Cadeias de Markov a tempo contínuo

Cadeias de Markov em tempo contínuo requerem o conhecimento da probabilidade de transição de um tempo arbitrário t para um tempo arbitrário $t + \tau$, ou seja

$$p_{ij}(t, \tau) = \text{Prob}[X(t + \tau) = j \mid X(\tau) = i], \quad \forall t \geq 0. \quad (2.8)$$

Para este tipo de cadeia de Markov, assumimos que a matriz de probabilidades de transição depende apenas da diferença entre dois instantes de tempo, isto é, o mesmo que $p_{ij}(t, \tau) = p_{ij}(t - \tau)$ que pode ser denotado por $p_{ij}(t)$ quando τ for nulo, tal que para uma etapa, temos

$$p_{ij}(t, \tau) = \text{Prob}[X(t + \tau) = j \mid X(\tau) = i] = \text{Prob}[X(t) = j \mid X(0) = i], \quad (2.9)$$

$$\forall t \geq 0 \quad \text{e} \quad \tau \geq 0,$$

ou simplesmente pode ser denotada por

$$p_{ij}(\Delta) = \text{Prob}[\theta_{t+\Delta} = j \mid \theta_t = i]. \quad (2.10)$$

Desta forma, dizemos que $X(t)$ tem probabilidades de transição homogêneas, o que implica que as probabilidades de transição não mudam ao longo do tempo. Assim, $\Pi(t) = [p_{ij}(t)]$ é a matriz de probabilidades de transição para um sistema markoviano a tempo contínuo para cada instante de tempo t em um intervalo contínuo.

Um caso particular da equação de definição é quando utilizamos a expansão em série em (2.10), assim $p_{ij}(\Delta)$ pode ser representado por

$$p_{ij}(\Delta) = \begin{cases} \lambda_{ij}\Delta + o(\Delta) & i \neq j \\ 1 + \lambda_{ii}\Delta + o(\Delta) & i = j \end{cases}, \quad (2.11)$$

onde $\lambda_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$, $\lambda_{ii} \leq 0$, $\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} = 0$ e $o(\Delta)$ denota o termo que se torna desprezível quando Δ tende para zero. A matriz das taxas de transição é dada pelas taxas de transição entre os modos da cadeia de Markov da evolução de $\theta_t \in \mathbb{K}$, isto é

$$\Lambda = [\lambda_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}. \quad (2.12)$$

No diagrama da Figura 1 cada entrada fora da diagonal λ_{ij} fornece o valor que atribuímos à seta p_{ij} , que iremos interpretar como a taxa com que o modo da cadeia transita de i para j . Já $|\lambda_{ii}|$ é a taxa de permanência no modo i .

Então, a matriz das taxas de transição Λ em (2.12) será uma matriz quadrada $N \times N$, em que N é o número de modos da cadeia no conjunto \mathbb{K} e deve satisfazer as seguintes condições de normalização

$$\lambda_{ii} \leq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} = 0, \quad \forall (i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}. \quad (2.13)$$

Ou seja, em cada linha a soma das componentes λ_{ij} da matriz das taxas de transição deve ser igual a 0 e a diagonal representada por λ_{ii} deve ser zero ou negativa.

O modo de uma cadeia de Markov em tempo contínuo varia conforme uma cadeia de Markov em tempo discreto, chamada cadeia embutida. Para entender este fato, podemos pensar no espaço de parâmetro discreto \mathbb{K} incorporado no espaço de parâmetro contínuo \mathbb{I} , ou melhor, considerando um $p \in (0, \infty)$, uma maneira natural de interpolar a sequência discreta, p^n em n etapas, é pela função $e^{t\lambda}$ para $t \geq 0$, onde $\lambda = \ln p$. Considerando agora o conjunto \mathbb{K} e uma matriz Π , uma maneira natural de preencher as lacunas da sequência discreta Π^n para n etapas é fazer com que a matriz Λ , converge componente a componente a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!}$, assim, o seu limite é denotado pela exponencial e^Λ . Suponha então que possamos encontrar uma matriz Λ com $e^\Lambda = \Pi$, assim, $e^{n\Lambda} = (e^\Lambda)^n = \Pi^n$, portanto, $e^{t\Lambda}$ para $t \geq 0$ preenche as lacunas da sequência discreta. Logo, podemos formalizar o teorema a seguir, (Norris, 1998).

Teorema 1:

Uma matriz Λ é uma matriz das taxas de transição para todos os $t \geq 0$ se e somente se $P(t) = e^{t\Lambda}$ é uma matriz de probabilidades de transição para todos os $t \geq 0$.

Os tempos em que ocorrem os saltos dessa cadeia a tempo discreto são definidos pelos tempos de permanência em cada modo, que obedecem a uma distribuição exponencial. Note ainda que a quantidade de tempo que o processo gasta no modo i e o próximo modo visitado devem ser variáveis aleatórias independentes, pois, se o próximo modo visitado fosse dependente do tempo de permanência, então as informações de quanto tempo o processo já estava no modo seriam relevantes para a previsão do estado futuro (Ross, 2010). Esta abordagem é de suma importância e será melhor explicada no próximo tópico.

2.2.3 Matriz das taxas de transição e o tempo de permanência

Para uma cadeia de Markov a tempo contínuo existe uma relação importante entre o tempo de permanência e a componente λ_{ii} da matriz das taxas de transição.

Consideramos T_i o tempo gasto no modo i e a probabilidade de gastar mais do que t segundos neste modo, $\text{Prob}[T_i > t]$. Agora, suponha que o processo já esteja no modo i por s segundos, então a probabilidade de gastar mais tempo neste modo é

$$\text{Prob}[T_i > t + s \mid T_i > s] = \text{Prob}[T_i > t + s \mid X(s') = i, 0 \leq s' \leq s]. \quad (2.14)$$

Dado que $T_i > s$, o sistema esteve no modo i durante o intervalo de tempo dado. Considerando $X(s) = i$, então o passado é irrelevante e podemos visualizar o sistema como recomeçado no modo i no tempo s , tal que $\text{Prob}[T_i > t + s \mid T_i > s] = \text{Prob}[T_i > t]$. Esta propriedade do processo estocástico sem memória somente é satisfeita por uma variável aleatória exponencial. Por isso, o tempo de permanência no modo i é uma variável aleatória exponencial. Então, para, um processo markoviano contínuo com $v_i = -\lambda_{ii}$ temos $\text{Prob}[T_i > t] = e^{-v_i t}$. Além disso, o tempo médio de permanência τ_i no modo para todo $i \in \mathbb{K}$ é dado por $\tau_i = \frac{1}{|\lambda_{ii}|}$, ou

$$\lambda_{ii} = -\frac{1}{\tau_i}. \quad (2.15)$$

Cada vez que um modo i é selecionado, um tempo de permanência T_i também é selecionado com distribuição exponencial e média $\tau_i = -1/\lambda_{ii}$. Quando o tempo se esgotar, o próximo modo j é selecionado de acordo com uma cadeia de Markov discreta com probabilidades de transição \tilde{q}_{ij} , que chamamos de cadeia de Markov embutida (*embedded*). Então, o novo tempo do modo de permanência T_j é selecionado e assim por diante, em geral, este tempo é diferente para cada modo. Com a noção da probabilidade de transição de uma cadeia de Markov embutida \tilde{q}_{ij} temos

$$p_{ij}(\Delta) = (1 - p_{ij}(\Delta))\tilde{q}_{ij}, \quad (2.16)$$

que utilizando (2.11) torna-se

$$\tilde{q}_{ij} = \frac{\lambda_{ij} + o(\Delta)/\Delta}{-\lambda_{ii} + o(\Delta)/\Delta}. \quad (2.17)$$

Como $\lambda_{ii} < 0$ para Δ arbitrariamente pequeno temos finalmente

$$\tilde{q}_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{|\lambda_{ii}|}. \quad (2.18)$$

Desta forma, quando o tempo de permanência no modo i , que é definido de acordo com uma distribuição exponencial de média $1/|\lambda_{ii}|$ se encerra, uma cadeia de Markov discreta determina

o próximo modo j através da matriz de transição entre estados, tais que

$$\begin{aligned} Q_\lambda &= \{\tilde{q}_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N} \\ \tilde{q}_{ij} &= \lambda_{ij}/|\lambda_{ii}|, \quad \forall j \neq i \\ \tilde{q}_{ii} &= 0 \quad \forall i. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Conforme dito, a matriz das taxas de transição permite determinar a distribuição dos tempos de permanência em cada modo e também as probabilidades de salto para os demais modos quando estes tempos de permanência acabam.

Logo, pela equação (2.15), se o valor de λ_{ii} for muito alto, o tempo de permanência no modo terá duração média muito curta ou quase nula. Voltamos a este ponto quando descrevemos a parametrização das taxas de transição em função das probabilidades estacionárias.

3 Estado estacionário

Neste capítulo apresentamos a condição de estado estacionário e classificação das cadeias de Markov. A estacionaridade das cadeias de Markov ocorre depois de um tempo suficientemente longo, tal que as probabilidades envolvidas tendem a valores constantes. Para a análise do estado estacionário temos que observar o comportamento da cadeia de Markov calculando as probabilidades $\text{Prob}(\theta_t = i)$ para $t = k$ e para todo $i \in \mathbb{K}$. As equações de Chapman-Kolmogorov fornecem um método para calcular essas probabilidades.

3.1 Cadeias de Markov a tempo discreto

Quando uma cadeia de Markov a tempo discreto evolui ao longo do tempo, podemos definir as probabilidades de transição para n etapas, p_{ij}^n , isto é

$$p_{ij}^n = \text{Prob}[X_{n+k} = j \mid X_k = i], \quad n \geq 0, i, j \in \mathbb{K}. \quad (3.1)$$

Sabemos que $p_{ij}^1 = p_{ij}$, e assim consequentemente calculando as matrizes de probabilidades para cada etapa, temos uma forma para determinar essas probabilidades de transição para n passos de forma geral, isto é

$$p_{ij}^{m+n} = \sum_k p_{ik}^m p_{kj}^n \quad \forall m, n \geq 0 \text{ e } i, j \in \mathbb{K}. \quad (3.2)$$

A evolução das probabilidades de cada modo são chamadas de equações de Chapman-Kolmogorov e são facilmente entendidas observando que $p_{ik}^m p_{kj}^n$ representa as probabilidades, começando no modo i , a cadeia atingir o modo k em m passos e depois atingir j em n passos. Portanto, a soma das probabilidades relacionadas a todos os modos intermediários k possíveis, resulta na probabilidade de que o processo esteja no modo j após $m + n$ transições, conforme a equação (3.2).

Como Π^n denota a matriz das probabilidades de transição de n etapas p_{ij}^n , então é possível afirmar que

$$\Pi^{(m+n)} = \Pi^{(m)} \Pi^{(n)}. \quad (3.3)$$

É possível utilizar a equação (3.3) para determinar o estado estacionário da cadeia de Markov a tempo discreto, neste caso, depois de a cadeia de Markov evoluir por muito tempo, ou seja, $n \rightarrow \infty$, observamos que a matriz das probabilidades de transição para n passos tende a

uma matriz na qual todas as linhas são iguais, isto é $p_{ij}^n \rightarrow \pi_j$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e de acordo com o Teorema de Perron-Frobenius, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi^n = \mathbf{1}\pi_{\text{est}}, \quad (3.4)$$

em que $\mathbf{1} = [1, 1, \dots]^\top$ e $\pi_{\text{est}} = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N]$. A equação (3.4) nem sempre ocorre, apenas para cadeias que levam ao estado estacionário.

O vetor de probabilidades π_{est} é dito vetor de probabilidades estacionárias da cadeia de Markov a tempo discreto. Respeitando a normalização, que a soma das componentes do vetor estacionário seja igual a 1, isto é $\sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_i = 1$, e considerando que no estado estacionário o vetor de probabilidade inicial π_{0i} será igual ao vetor estacionário, a matriz Π da cadeia de Markov a tempo discreto pode ser facilmente determinada. Assim, a equação de definição dada por $p_j^n = \sum_{i \in \mathbb{K}} \text{Prob}[X_n = j \mid X_0 = i][X_0 = i] = \sum_{i \in \mathbb{K}} p_{ij}^n \pi_{0i}$ converge para $\pi_j = \sum_{i \in \mathbb{K}} p_{ij} \pi_i$ ou o mesmo que

$$\pi_{\text{est}} = \pi_{\text{est}} \Pi, \quad (3.5)$$

em que o vetor de estado estacionário $\pi_{\text{est}} \in \mathbb{R}^{1 \times N}$, onde N é o número de modos. Nessa situação, dizemos que o sistema atingiu o equilíbrio ou o estado estacionário. Ainda, podemos verificar que a equação (3.5) é o limite para a evolução das probabilidades dada pela expressão $\pi(k+1) = \pi(k)\Pi$, onde $\pi(k)$ é um vetor linha com as probabilidades de o modo da cadeia estar em cada um dos seus possíveis valores no instante k .

3.2 Cadeias de Markov a tempo contínuo

Quando uma cadeia de Markov em tempo contínuo evolui ao longo do tempo também é possível determinar as equações de Chapman-Kolmogorov. Primeiramente devemos definir a equação que rege a cadeia, considerando então, um intervalo de duração extra $\Delta > 0$. Em outras palavras

$$p_j(t) = \text{Prob}[X(t) = j], \quad (3.6)$$

e com o intervalo, temos

$$p_j(t + \Delta) = \text{Prob}[X(t + \Delta) = j]. \quad (3.7)$$

Fazendo o seguinte cálculo, obtemos

$$\begin{aligned}
 p_j(t + \Delta) &= \text{Prob}[X(t + \Delta) = j] \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{K}} \text{Prob}[X(t + \Delta) = j \mid X(t) = i] \text{Prob}[X(t) = i] \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{K}} p_{ij}(\Delta) p_i(t).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ao subtrair $p_j(t)$ de ambos os lados, chegamos na expressão

$$p_j(t + \Delta) - p_j(t) = \sum_{i \in \mathbb{K}} p_{ij}(\Delta) p_i(t) + (p_{jj}(\Delta) - 1) p_j(t) \quad \forall \quad i \neq j. \tag{3.9}$$

Dividindo (3.9) por Δ e aplicando $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\Delta)}{\Delta} = \lambda_{ij}$, para $i \neq j$ e $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(\Delta) - 1}{\Delta} = \lambda_{ii}$ e fazendo $\Delta \rightarrow 0$, obtemos as chamadas equações de Chapman-Kolmogorov para cadeia de Markov a tempo contínuo

$$\dot{p}_j(t) = \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} p_i(t), \quad t \geq 0. \tag{3.10}$$

Para determinar $p_j(t)$ devemos resolver este sistema de equações diferenciais com condição inicial especificada pelas probabilidades iniciais, isto é $p_j(0)$ para cada $j \in \mathbb{K}$, assim como $t \rightarrow \infty$, no estado estacionário podemos afirmar que $p_j(t) \rightarrow p_j$ e $\dot{p}_j(t) \rightarrow 0$, então a equação (3.10) torna-se

$$0 = \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} \pi_i, \quad \forall j \in \mathbb{K}, \tag{3.11}$$

onde π_i será o vetor no estado estacionário e normalizado, o mesmo que $\sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_i = 1$.

A probabilidade converge para uma condição que não depende das condições iniciais, isto é, um sistema em equilíbrio ou em estado estacionário.

No estado estacionário, como $t \rightarrow \infty$, então da equação (3.10) podemos encontrar a probabilidade de $p_i(t) \rightarrow \pi_i$. Pois, a derivada do vetor de probabilidades é nula e a relação entre a matriz das taxas de transição e o vetor de probabilidades estacionárias pode ser resumida pela equação abaixo

$$\pi_{\text{est}} \Lambda = 0, \tag{3.12}$$

em que o vetor de estado estacionário $\pi_{\text{est}} \in \mathbb{R}^{1 \times N}$, onde N é o número de modos e Λ é a matriz das taxas de transição para a cadeia de Markov a tempo contínuo. A matriz Λ não pode ser determinada, pois, há infinitas soluções em um politopo que descrevemos em maiores detalhes no Capítulo 5.

3.3 Classificação das cadeias de Markov

A classificação das cadeias de Markov é importante para analisar a relação entre o comportamento de uma cadeia de Markov e sua matriz das taxas ou de probabilidades de transição por intermédio da estrutura de classes dos modos. Ora, podemos ver que os tipos de classes do modo de uma cadeia de Markov estão relacionadas com o comportamento a longo prazo da cadeia.

3.3.1 Cadeias de Markov a tempo discreto

Primeiramente, dizemos que o modo j é acessível a partir do modo i , se para algum valor de $n \geq 0$, $p_{ij}^n > 0$, ou seja, se houver uma sequência de transições de i para j que tenha probabilidade diferente de zero. Os modos i e j se comunicam se estiverem acessíveis um ao outro, assim, escrevemos $i \leftrightarrow j$. Se o modo i se comunica com o modo j e o modo j se comunica com o modo k , ou seja, $i \leftrightarrow j$ e $j \leftrightarrow k$, então podemos dizer que o modo i se comunica com k . Caso dois modos se comunicam um com o outro, então eles pertencem à mesma classe. Uma cadeia de Markov em que todos os modos são comunicáveis assim consistindo de uma única classe é considerada irredutível. Em termos matriciais, a irredutibilidade da cadeia de Markov a tempo discreto pode ser determinada pelo lema a seguir, de (Horn; Johnson, 2012).

Lemma 1:

Seja Π em que $p_{ij} \geq 0$ para todo \mathbb{K} , então Π é irredutível se e somente se $(I + \Pi)^{n-1} > 0$, onde I é a matriz identidade e n é o número de modos da cadeia.

Se uma cadeia de Markov a tempo discreto é irredutível então podemos garantir o Teorema 2, (Horn; Johnson, 2012).

Teorema 2:

Seja a cadeia de Markov a tempo discreto Π em que $p_{ij} \geq 0$ para todo \mathbb{K} . A matriz Π é irredutível, então

- (i) $\rho(\Pi) > 0$,
- (ii) $\rho(\Pi)$ é um autovalor de Π ,
- (iii) Existe um vetor positivo x tal que $\Pi x = \rho(\Pi)x$,
- (iv) $\rho(\Pi)$ é um autovalor algebricamente simples de Π .

Vamos supor que começamos uma cadeia de Markov no modo i , isto é f_i . Assim, em uma cadeia de Markov, $f_i = \text{Prob}(X_k = i \mid X_0 = i) = p_{ii}^n$, para algum n , dizemos que o modo i é recorrente se o processo retornar ao modo com probabilidade 1, ou seja, $f_i = 1$. O modo i é considerado transitório se $f_i < 1$ e assim não garantindo o retorno. Assim, se iniciarmos a cadeia de Markov em um modo recorrente i , então o modo ocorrerá um número infinito de vezes. Se iniciarmos a cadeia de Markov em um modo transitório, o modo não se repete após um número finito de transições, isto é, um modo transitório ocorre apenas um número finito

de vezes. Se um conjunto de modos for fechado, irredutível e recorrente então esse conjunto é recorrente positivo.

Recorrência e transitoriedade são propriedades de classe, isto é, se um modo i é recorrente, todos os modos em sua classe são recorrentes, da mesma forma, se um modo i é transitório, todos os modos de sua classe são transitórios. Se o modo i for recorrente, todos os modos de sua classe serão visitados eventualmente, como o processo retorna para sempre ao modo i repetidamente. De fato, todos os outros modos em sua classe aparecerá um número infinito de vezes. Um modo é dito ser absorvente se, entrando neste modo, o processo nunca irá deixar este modo. Portanto, um modo i é absorvente se, e somente se, $p_{ii} = 1$. Com isso, podemos afirmar que um modo absorvente é um caso especial de um modo recorrente.

Se uma cadeia de Markov é irredutível então todos os seus modos são transitórios ou todos os seus modos são recorrentes. Se a cadeia de Markov possui um espaço de estados finito, é possível que todos os seus modos sejam transitórios. No entanto, como alguns dos modos devem ocorrer um número infinito de vezes à medida que o tempo avança, isto implica que todos os modos são recorrentes. Portanto, os modos de uma cadeia de Markov irredutível com espaço de estados finito são todos recorrentes. Se o espaço de estados for contável embora não finito, todos os modos poderão ser transitórios.

A estrutura do diagrama de transição dos estados e as probabilidades de transição diferentes de zero associadas podem impor periodicidade nas realizações de uma cadeia de Markov a tempo discreto. Dizemos que o modo i possui o período d se ele só pode ocorrer novamente em momentos que são múltiplos de d , ou seja, $p_{ii}^n = 0$ sempre que n não é um múltiplo de d , onde d é o maior número inteiro com essa propriedade. Dizemos que o modo i é aperiódico se tiver período $d = 1$.

Periodicidade é uma propriedade de classe, ou seja, todos os modos de uma classe têm o mesmo período. Dizemos que uma cadeia de Markov irredutível é aperiódica se os modos de sua classe única tiver o período 1. Dizemos que uma cadeia de Markov irredutível é periódica se seus modos tiverem período $d > 1$.

Se todos os modos de uma cadeia de Markov são transientes, todas as probabilidades de transição se aproximam de zero com $n \rightarrow \infty$.

Se uma cadeia de Markov tem algumas classes transientes e outras recorrentes, eventualmente o processo entra e permanece posteriormente em uma das classes recorrentes. Portanto, podemos nos concentrar em classes recorrentes individuais ao estudar as probabilidades limitantes de uma cadeia, isto é, verificando o comportamento assintótico das cadeias de Markov. Como o modo é recorrente, o processo retorna ao modo i um número infinito de vezes. Assim, a proporção a longo prazo do tempo gasto no modo i denotado por

π_i que se aproxima da seguinte expressão

$$\text{proporção de tempo no modo } i \rightarrow \frac{1}{E[T_i]} = \pi_i, \quad (3.13)$$

em que $E[T_i]$ é o tempo médio de recorrência e π_i é a proporção a longo prazo do tempo gasto no modo i . Pela equação (3.13), se $E[T_i] < \infty$, então dizemos que o modo i é recorrente positivo, isso implica que $\pi_i > 0$, por outro lado, se $E[T_i] = \infty$, então dizemos que o modo i é recorrente nulo, isso implica que $\pi_i = 0$.

Para cadeias de Markov com espaço de estado finito, os modos aperiódicos e recorrentes positivos são chamados ergódicos. Depois que uma cadeia de Markov entra em um estado ergódico, o processo permanece na classe do modo para sempre. Além disso, o processo visitará todos os modos da classe com frequência suficiente para que a proporção de longo prazo de um determinado modo seja governada por (3.13) e aproxime-se de um valor diferente de zero. Assim, o processo revelará suas probabilidades de modo subjacente através de médias de tempo. Portanto, uma cadeia de Markov ergódica seja definida como uma cadeia de Markov irredutível, aperiódica e recorrente positiva.

3.3.1.1 Estado estacionário

Os teoremas a seguir interessam neste trabalho. Definimos classes, de irredutibilidade, de recorrência, de transitoriedade, de período, pois queremos ter clareza sobre quando é possível usar as técnicas do Capítulo 5. Ou seja, quando existem probabilidades estacionárias.

A probabilidade de estado estacionário π_j pode ser interpretada como a probabilidade limitadora de estar no modo j . É o mesmo que a proporção de longo prazo de visitas ao modo j . O Teorema 3 e Teorema 4 declaram sob quais condições, em certas cadeias de Markov, a matriz de transição em n etapas, quando $n \rightarrow \infty$, aproxima-se de uma matriz fixa de linhas iguais. As linhas dessa matriz limitadora consistem em probabilidades que satisfazem as equações abaixo

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_i \pi_{ij}, \quad \forall j \quad \text{e} \quad \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_i = 1, \quad \forall i. \quad (3.14)$$

Os π_j 's em (3.13) satisfazem as equações que definem o estado estacionário para a cadeia de Markov a tempo discreto, ou o mesmo que em (3.14). Desde que π_i seja a proporção de tempo gasto no modo i , então $\pi_i \pi_{ij}$ é a proporção de tempo em que o modo j segue para i . Se somarmos todo i , obtemos a proporção de tempo de longo prazo no modo j , isto é π_j .

Teorema 3:

Para uma cadeia de Markov aperiódica e irredutível, exatamente uma das seguintes afirmações é válida:

(i) *Todos os modos são transientes ou todos os modos são nulos recorrentes, isto é, $p_{ij}^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ a todos i e j , e não existe probabilidade estacionária.*

(ii) Todos os modos são recorrentes positivos, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^n = \pi_j, \forall j, \quad (3.15)$$

onde π_j , para $j = \{1, 2, 3, \dots\}$, é a solução da probabilidade estacionária exclusiva para a equação de estacionaridade.

Para cadeias periódicas, temos o seguinte resultado.

Teorema 4:

Para uma cadeia de Markov irredutível, recorrente positiva e periódica com período d , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}(nd) = d\pi_j, \forall j, \quad (3.16)$$

onde π_j é a solução não-negativa exclusiva das equações de estacionaridade.

Teorema 5:

Seja a cadeia de Markov a tempo discreto Π em que $p_{ij} \geq 0$ para todo \mathbb{K} . A matriz Π é irredutível e $\Pi x = \rho(\Pi)x$, $\Pi^\top y = \rho(\Pi)y$, $x^\top y = 1$ e $L = xy^\top$, em que x e y são vetores não negativos, então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k [\rho(\Pi)^{-1} \Pi]^m = L. \quad (3.17)$$

Além disso, existe uma constante positiva finita C , tal que

$$\left\| \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k [\rho(\Pi)^{-1} \Pi]^m - L \right\|_\infty \leq \frac{C}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{K}. \quad (3.18)$$

O Teorema 3 afirma que, para cadeias de Markov ergódicas, as probabilidades de transição em n passos aproximam-se de valores constantes dado pelo estado estacionário. As probabilidades de estado se aproximam de valores de estado estacionário que são independentes das condições iniciais. Essas probabilidades de estado estacionário correspondem às probabilidades estacionárias obtidas pela resolução da equação (3.14) e, portanto, correspondem à proporção de longo prazo do tempo de permanência em um determinado modo. Além disso, também afirma que, se a cadeia de Markov irredutível é transitória ou recorrente nula, então uma solução estacionária para a equação (3.14) não existe. Isso implica que, quando encontramos uma solução e a cadeia é irredutível e aperiódica, a cadeia de Markov deve ser recorrente positiva, portanto, ergódica.

Pelo Teorema 4, π_j , representa a proporção de tempo gasto no modo j . No entanto, o fato de o modo j estar restrito a ocorrer em múltiplos de d etapas, implica que a probabilidade de ocorrência do modo j é d vezes maior nos momentos permitidos e zero em outros momentos.

O Teorema 5 garante que mesmo que uma matriz Π seja irredutível, necessariamente Π não precisa chegar a um limite. No entanto, existe um sentido preciso no qual, em média, esse limite existe (Horn; Johnson, 2012).

3.3.2 Cadeias de Markov a tempo contínuo

A identificação das classes de uma cadeia de Markov a tempo contínuo leva ao mesmo conceito da estrutura de classe de uma cadeia a tempo discreto. Como dito, podemos visualizar uma cadeia de Markov a tempo contínuo como uma cadeia de Markov a tempo discreto incorporado com tempos de permanência exponenciais, Q_λ . Dessa forma, facilitando a classificação dos modos (Anderson, 2017). Assim, a estrutura da cadeia de Markov a tempo contínuo relaciona-se com os saltos da cadeia.

De acordo com (Norris, 1998) um procedimento para obter a matriz embutida Q_λ da matriz das taxas Λ é fazendo

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \tilde{q}_{ij}/\tilde{q}_i & \text{se } j \neq i \text{ e } \tilde{q}_i \neq 0 \\ 0 & \text{se } j \neq i \text{ e } \tilde{q}_i = 0 \end{cases} \text{ e } \lambda_{ii} = \begin{cases} 0 & \text{se } \tilde{q}_i \neq 0 \\ 1 & \text{se } \tilde{q}_i = 0 \end{cases}. \quad (3.19)$$

As classes de comunicação da cadeia de Markov a tempo contínuo $X(t)$ são as classes de comunicação da cadeia de Markov incorporada X_k . Portanto, dizemos que i leva a j e escrevemos $i \rightarrow j$ se $\text{Prob}(X(t) = j \mid X(0) = i) > 0$ para alguns $t \geq 0$. Dizemos que i se comunica com j , e escrevemos $i \leftrightarrow j$, se ambos $i \rightarrow j$ e $j \rightarrow i$. Para modos distintos i e j , podemos ter $p_{ij}(t) > 0$ para todo $t > 0$, esta condição mostra que a situação é mais simples do que o tempo discreto, onde pode ser possível chegar a um modo, mas somente após um certo tempo ou somente periodicamente. Se houver apenas uma classe de comunicação, dizemos que a cadeia é irredutível, caso contrário, é dito redutível, ver em (Norris, 1998).

Também, as noções de classe fechada, irredutibilidade, recorrência e transitoriedade são herdadas dos saltos da cadeia, portanto relacionadas com as definições de uma cadeia de Markov a tempo discreto. As definições a seguir, (Anderson, 2017), conceitua a recorrência para o caso a tempo contínuo.

Definição 2:

O modo i é chamado de recorrente para $X(t)$ se i é recorrente para a cadeia de Markov a tempo discreto incorporado X_k . Caso contrário, i é transitório.

Especificamente, nas classificações de recorrência e transitoriedade, seja $X(t)$ para $t \geq 0$, uma cadeia de Markov que possui a matriz das taxas Λ e seja T_i o primeiro tempo de salto do modo i para o modo j , ou o tempo de recorrência do modo i quando $i = j$. Se $\lambda_i = 0$ ou $\text{Prob}(T_i < \infty) = 1$, então i é recorrente e $\int_0^\infty p_{ii}(t)dt = \infty$. Por outro lado, i é transiente se $\lambda_i > 0$

e $\text{Prob}(T_i < \infty) < 1$ e $\int_0^\infty p_{ii}(t)dt < \infty$. Caso contrário, um modo de recorrência i é chamado recorrente nulo.

Definição 3:

Se T_1 denota o tempo do primeiro salto da cadeia de Markov a tempo contínuo. Definimos

$$\tau_i = \inf \{t \geq T_i : X(t) = i\}, \quad (3.20)$$

e o conjunto $m_i = \mathbb{E}_i \tau_i$. Dizemos que o modo i é recorrente positivo se $m_i < \infty$.

Observe que, talvez surpreendentemente, não definimos i como recorrente positivo se for recorrente positivo para o caso a tempo discreto. Às vezes, pode ser recorrente positivo para X_k , enquanto não para $X(t)$. Como no tempo discreto, recorrência, transitoriedade e recorrência são propriedades de classe.

3.3.2.1 Estado estacionário

A recorrência positiva na cadeia de Markov a tempo contínuo está ligada à existência de uma distribuição estacionária como no caso a tempo discreto. Contudo, a existência de uma distribuição estacionária para uma cadeia de Markov a tempo contínuo não é suficiente para garantir a recorrência positiva ou até mesmo a recorrência.

O comportamento limitado de $p_{ij}(t)$ com $t \rightarrow \infty$ e sua relação com distribuição estacionária é uma situação análoga ao caso a tempo discreto, porém, não há mais possibilidade de periodicidade. As médias de longo prazo para cadeias de tempo contínuo exibem o mesmo tipo de comportamento que no caso a tempo discreto e por razões semelhantes.

Observe que o conceito de periodicidade não desempenha mais um papel ou até faz sentido definir, pois, o tempo não é mais discreto. De fato, se $P(t)$ é a matriz com entradas $P_{ij}(t)$ para uma cadeia de Markov a tempo contínuo irreduzível para todo $t > 0$, $P_{ij}(t)$ tem entradas estritamente positivas, porque existe necessariamente um caminho entre i e j , e uma probabilidade diferente de zero de se mover ao longo desse caminho no tempo $t > 0$.

Encontramos condições para a existência de uma distribuição estacionária única para uma cadeia de Markov a tempo contínuo, isto é irreduzibilidade e recorrência positiva, ou o mesmo que ergodicidade. Como no caso a tempo discreto, ainda existe a questão da convergência. O Teorema 6, apresenta condições limitantes para a cadeia de Markov a tempo contínuo, enquanto o Teorema 7 define condições de estacionaridade, ver em (Anderson, 2017).

Teorema 6:

Seja $X(t)$ uma cadeia de Markov a tempo contínuo e ergódica, com distribuição invariante η . Então, para todos os $(i, j) \in \mathbb{K}$, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = \eta_j. \quad (3.21)$$

Como no tempo discreto, temos um teorema ergódico, que simplesmente afirmamos a seguir.

Teorema 7:

Suponha que $X(t)$ é uma cadeia de Markov a tempo contínuo recorrente positiva e irreduzível com uma única distribuição estacionária η . Então, para qualquer condição inicial, e qualquer $i \in \mathbb{K}$, temos

$$\text{Prob} \left(\frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{X(s)=i\}} ds \rightarrow \eta_i, \text{ como } t \rightarrow \infty \right) = 1. \quad (3.22)$$

Além disso, para qualquer função limitada $f : S \rightarrow R$, temos

$$\text{Prob} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds \rightarrow \bar{f}, \text{ como } t \rightarrow \infty \right) = 1, \quad (3.23)$$

onde

$$\bar{f} = \sum_{j \in S} \eta_j f(j) = \mathbb{E}_\eta [f(X_\infty)],$$

onde X_∞ tem distribuição η .

Portanto, como na cadeia de Markov a tempo discreto, vemos que η_i é a proporção de tempo gasto no modo i por longos períodos.

3.3.3 Exemplo

Neste momento vamos ilustrar a classificação das cadeias de Markov a tempo discreto e a tempo contínuo. O *Toolbox Econometrics* do *Matlab* permite fazer esta classificação. Utilizamos dessa ferramenta para ilustrar os dígrafos de duas cadeias de Markov de 2 e 3 modos. Essas cadeias obedecem à condição de irreduzibilidade, recorrência positiva e aperiodicidade, ou melhor, exemplificamos usando cadeias que atendam a condição de estacionaridade. Desta forma, sejam as cadeias de Markov a tempo discreto e a tempo contínuo a seguir

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Pela (3.19), a matriz de salto Q_Λ de Λ é dado por

$$Q_\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os diagramas de classificação das cadeias são plotados na Figura 2.

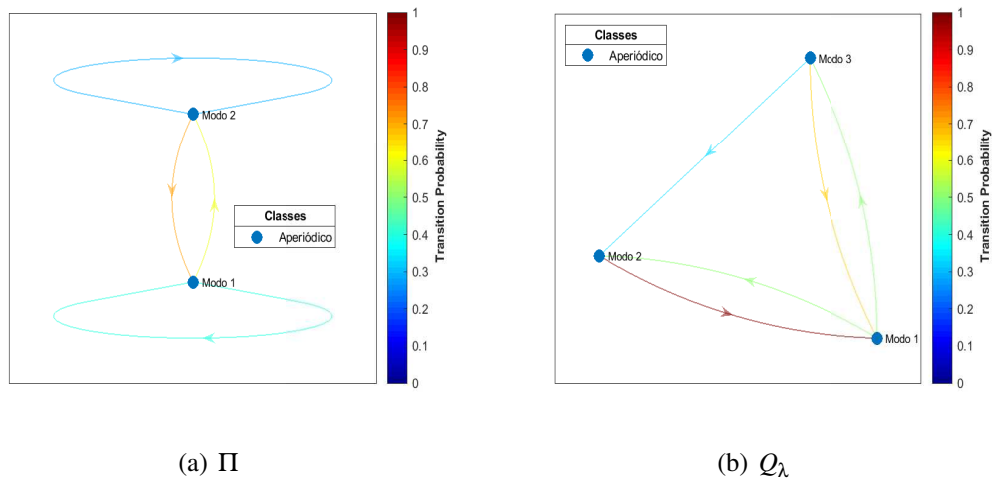


Figura 2 – Classificação dos modos de Π e Λ .

Pela Figura 2, a cadeia Π possui uma única classe aperiódica composta por dois modos recorrentes positivos, portanto ergódica. Já, para a cadeia Λ temos uma classe aperiódica composta por três modos recorrentes positivos e também ergódica.



4 Sistemas com saltos markovianos

Neste capítulo, apresentamos os sistemas lineares com saltos markovianos tanto a tempo contínuo quanto a tempo discreto. Na sequência, descrevemos definições bem como os teoremas relativos à estabilidade e normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Os teoremas clássicos relacionados à síntese de realimentação de estado e filtragem com restrições na forma de LMIs também são discutidos. Por fim, apresentamos resultados que permitem lidar com incertezas paramétricas na matriz das taxas ou de probabilidades de transição. Finalmente, apresentamos alguns exemplos ilustrativos.

4.1 Sistemas lineares com saltos

Sistemas com eventos inesperados que causam falhas ou perdas podem ser modelados por um processo markoviano. No caso linear, tais sistemas são chamados de sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos (MJLS). Com relação ao tempo, podem ser tanto em tempo contínuo quanto em tempo discreto. Um sistema linear sujeito a saltos markovianos em tempo contínuo é descrito pelo seguinte modelo de espaço de estado estocástico

$$\mathcal{G} : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\theta_t)x(t) + B(\theta_t)u(t) + J(\theta_t)w(t) \\ z(t) &= C_z(\theta_t)x(t) + D_z(\theta_t)u(t) + E_z(\theta_t)w(t) \\ y(t) &= C_y(\theta_t)x(t) + E_y(\theta_t)w(t) \end{cases} , \quad (4.1)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é a variável de estado do sistema, $\theta_t \in \mathbb{K}$ é uma variável aleatória, onde $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, N\}$ é o conjunto de modos da cadeia de Markov, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ é uma perturbação externa e $z(t) \in \mathbb{R}^r$ é a saída a ser controlada ou estimada, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ é o sinal de controle e $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é o sinal medido.

As matrizes de estado dependem de uma cadeia de Markov em tempo contínuo, com probabilidades de transição dadas por (2.10), com a matriz das taxas de transição Λ com características descritas em (2.12) e (2.13).

O sistema linear com saltos markovianos a tempo discreto é descrito matematicamente pelo seguinte modelo de espaço de estado estocástico

$$\mathcal{G} : \begin{cases} x(k+1) &= A(\theta_k)x(k) + B(\theta_k)u(k) + J(\theta_k)w(k) \\ z(k) &= C_z(\theta_k)x(k) + D_z(\theta_k)u(k) + E_z(\theta_k)w(k) \\ y(k) &= C_y(\theta_k)x(k) + E_y(\theta_k)w(k) \end{cases} , \quad (4.2)$$

onde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ representa a variável de estado do sistema, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ são as perturbações externas, $z(k) \in \mathbb{R}^r$ é a saída controlada ou estimada, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ é a saída medida, $u(k) \in \mathbb{R}^q$ é

o sinal de controle e θ_k é uma variável aleatória, sabendo que $\{\theta(k) : k \in \mathbb{N}\}$ caracteriza uma cadeia de Markov a tempo discreto.

As matrizes de estado dependem de uma cadeia de Markov que assume valores em um conjunto finito, ou seja, $\theta_k \in \mathbb{K} = \{1, \dots, N\}$, onde N é definido como o número de modos de operação do sistema e a matriz de probabilidades de transição $\Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é dada pela matriz $\Pi = [p_{ij}]$ com $p_{ij} = \text{Prob}[\theta_{k+1} = j \mid \theta_k = i]$, que devem satisfazer as características da cadeia de Markov a tempo discreto, conforme as condições mostradas em (2.7). Para ambos os modelos as condições iniciais são $x(0) = x_0$ e $\theta(0) = \theta_0$.

Deste forma, para o caso em tempo discreto, o comportamento da cadeia de Markov associada ao sistema com salto é definido pela matriz de probabilidades de transição e no caso contínuo pelas taxas de transição. As taxas ou as probabilidades de transição que regem o sistema com saltos são parâmetros que podem, ou não ser perfeitamente conhecidos. Nesta dissertação, consideramos que essas matrizes são incertas ou não completamente conhecidas. Vamos assumir o conhecimento somente das probabilidades estacionárias. Discutiremos a seguir outros conceitos relevantes ao controle deste tipo de sistema, tais como a estabilidade, normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , síntese de controladores por realimentação de estado e filtros robustos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , tanto para tempo contínuo quanto para tempo discreto. Em todos os teoremas, usamos a noção de otimização convexa com restrições em forma de desigualdades matriciais lineares, ou LMIs, sigla que vem do nome em inglês *Linear Matrix Inequalities*. Inicialmente, vamos supor que os parâmetros dos saltos, sejam as taxas ou probabilidades, sejam perfeitamente conhecidos. Em seguida, mostraremos que é relativamente simples tratar o problema robusto as incertezas nesses parâmetros.

4.1.1 Estabilidade

Pretendemos verificar, na análise de estabilidade, sob que condições o sistema é definido como estável. Conforme alguma das definições da literatura, as LMIs dão condições de teste para verificar a estabilidade dos sistemas com saltos markovianos. Por isso, nesta dissertação apresentamos a estabilidade em termos de LMIs, para que as definições de estabilidade sejam aplicadas a síntese de controladores e filtros.

4.1.1.1 Sistemas com saltos markovianos a tempo contínuo

A estabilidade do sistema com saltos markovianos a tempo contínuo pode ser definida de acordo com (Feng *et al.*, 1992).

Definição 4:

O sistema (4.1) é estocasticamente estável se existir $M = M^\top > 0$, tal que

$$\mathbb{E} \left\{ \int_0^\infty x(t)^\top x(t) dt \mid \theta_0 \right\} \leq x_0^\top M x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (4.3)$$

Também, o entendimento acima implica que para qualquer estado inicial (x_0, θ_0) , o sistema (4.1) deve convergir em média quadrática para a origem. Mais ainda, existirão a e b tais que

$$\mathcal{E} \left\{ \|x(t)\|^2 \right\} \leq b \|x(0)\|^2 e^{-at}, \forall t \geq 0. \quad (4.4)$$

No teorema a seguir, cuja prova está em (Cardeliquio, 2014), são apresentadas condições do tipo LMIs para a estabilidade de sistemas a tempo contínuo. Consideramos que o ponto de equilíbrio é a origem, isto é $x = 0$ e, para o estudo de estabilidade, supomos que as entradas exógena e de controle são nulas, ou seja, $w(t) = 0$ e $u(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Este teorema permite verificar a estabilidade de um sistema a partir de uma condição necessária e suficiente.

Teorema 8:

O modelo (4.1) é estável se, e somente se, existirem matrizes $P_i = P_i^\top > 0$, tais que as desigualdades acopladas possam ser simultaneamente satisfeitas

$$A_i^\top P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j < 0, \quad (4.5)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$.

4.1.1.2 Sistemas com saltos markovianos a tempo discreto

O sistema com saltos markovianos a tempo discreto pode ser definido como estável conforme a referência (Ji, 1991).

Definição 5:

Considerando o modelo 4.2 com a entrada $w(k)$ nula para todo $k \in \mathbb{N}$ e condições iniciais $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\theta_0 \in \mathbb{K}$. O sistema é

- *Estável por média quadrática, se para todo estado inicial (x_0, θ_0)*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left\{ x(k)^\top x(k) \mid x_0, \theta_0 \right\} = 0. \quad (4.6)$$

- *Estocasticamente estável, se para todo estado inicial (x_0, θ_0)*

$$\mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x(k)^\top x(k) \mid x_0, \theta_0 \right\} < \infty. \quad (4.7)$$

- *Exponencialmente estável por média quadrática, se para cada estado inicial (x_0, θ_0) existirem constantes $0 < \alpha < 1$ e $\beta > 0$ tais que para todo $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{E} \left\{ x(k)^\top x(k) \mid x_0, \theta_0 \right\} < \beta \alpha^k x_0^\top x_0. \quad (4.8)$$

No Teorema 9, cuja demonstração se encontra na referência (Gonçalves, 2009), são apresentadas condições do tipo LMIs para a estabilidade de sistemas a tempo discreto. Consideramos que o ponto de equilíbrio é a origem, isto é $x = 0$ e as entradas exógena e de controle são nulas, ou seja, $w(k) = 0$ e $u(k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Este teorema permite verificar a estabilidade de um sistema a partir de uma condição necessária e suficiente.

Teorema 9:

O sistema (4.2) é estável se, e somente se, existirem matrizes $P_i = P_i^\top > 0$, tais que as desigualdades a seguir possam ser simultaneamente satisfeitas

$$A_i^\top P_{pi} A_i - P_i < 0, \quad \forall i \in \mathbb{K}, \quad (4.9)$$

onde $P_{pi} = \sum_{j \in \mathbb{K}} p_{ij} P_j$.

Uma característica importante para os sistemas com saltos é que a estabilidade de cada modo, isto é, do sistema linear quando se fixa $\theta_t = i$, não é condição necessária e nem suficiente para a estabilidade do sistema na totalidade, tanto para sistemas a tempo contínuo quanto para o discreto, o mesmo raciocínio é válido para a instabilidade.

4.1.2 Normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞

Os desempenhos dos ganhos de controle são determinados utilizando o conceito das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de sistemas lineares com saltos markovianos. A norma \mathcal{H}_2 estabelece uma noção de distância entre o estado do sistema e seu ponto de funcionamento nominal enquanto a norma \mathcal{H}_∞ estabelece limitantes para a influência de ruídos na saída do sistema. A seguir, enunciamos as seguintes definições e teoremas considerando a entrada de controle nula e com condição inicial $x(0) = 0$. As provas da necessidade e da suficiência das condições em forma de LMIs se encontram na referência (Cardeliquio, 2014) para sistemas a tempo contínuo e em (Gonçalves, 2009) para sistemas a tempo discreto.

4.1.2.1 Normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ a tempo contínuo

Definimos a seguir a norma \mathcal{H}_2 para sistemas com saltos markovianos a tempo contínuo.

Definição 6:

O sistema (4.1) sendo estocasticamente estável, tem norma \mathcal{H}_2

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 = \sum_{k=1}^r \mathcal{E} \left[\int_0^\infty z^k(t)^\top z^k(t) dt \right], \quad (4.10)$$

onde $z^k(t)$ é a saída do sistema para a entrada $w(t) = e^k \delta(t)$ com $x(0) = 0$, e^k é a k -ésima coluna da matriz identidade $r \times r$ e $\delta(t)$ é o impulso de Dirac.

Para que a norma \mathcal{H}_2 seja limitada é necessário anular a matriz E_{zi} para todo valor de $i \in \mathbb{K}$. No próximo teorema, apresentamos uma condição para o cálculo da norma \mathcal{H}_2 .

Teorema 10:

Seja o sistema (4.1), com E_{zi} nulo, para todo valor de $i \in \mathbb{K}$, a norma \mathcal{H}_2 pode ser calculada por

$$\|G\|_2^2 = \min \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{0i} \text{tr}(J_i^\top P_i J_i), \quad (4.11)$$

onde $\pi_{0i} = \text{Prob}(\theta_0 = i \in \mathbb{K})$ sujeito a

$$A_i^\top P_i + P_i A_i + C_{zi}^\top C_{zi} + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j < 0. \quad (4.12)$$

A norma \mathcal{H}_∞ é fundamentada na concepção de ser o ganho $\mathcal{L}_{c_2}^{-1}$ de pior caso. Para a definição da norma \mathcal{H}_∞ , consideramos que a entrada exógena w é um sinal arbitrário pertencente à classe \mathcal{L}_{c_2} , ou seja, que w seja tal que

$$\|w\|_2^2 = \mathcal{E} \left\{ \int_0^\infty w(t)^\top w(t) dt \right\} < \infty. \quad (4.13)$$

A seguir é enunciada a definição dessa norma para MJLS a tempo contínuo.

Definição 7:

A norma \mathcal{H}_∞ , para o sistema estocasticamente estável (4.1), é o menor valor $\gamma > 0$, com entrada w de sinal arbitrário pertencente à classe \mathcal{L}_{c_2} , tal que

$$\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2. \quad (4.14)$$

Portanto, como a entrada w é arbitrária e de norma \mathcal{L}_{c_2} finita, o mesmo ocorre com a norma \mathcal{L}_{c_2} da saída, pois o sistema é estocasticamente estável. Logo, segue a identidade considerando $\theta_0 \in \mathbb{K}$ e $w \in \mathcal{L}_{c_2}$

$$\gamma = \sup_{w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}. \quad (4.15)$$

Assim, podemos concluir que a norma \mathcal{H}_∞ do sistema é o ganho \mathcal{L}_{c_2} de pior caso.

O teorema a seguir realiza o cômputo da norma \mathcal{H}_∞ em termos de LMIs para MJLS a tempo contínuo.

¹ Definido como a razão $\|z\|^2/\|w\|^2$ sendo z a resposta a uma entrada w .

Teorema 11:

A norma \mathcal{H}_∞ do sistema (4.1) satisfaz a condição $\| \mathcal{G} \|_\infty^2 < \gamma^2$, se, e somente se, existirem matrizes $P_i = P_i^\top > 0$, tais que as LMIs sejam satisfeitas para todo $i \in \mathbb{K}$

$$\begin{bmatrix} A_i^\top P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j & \bullet & \bullet \\ J_i^\top P_i & -\gamma^2 I & \bullet \\ C_{zi} & E_{zi} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.16)$$

onde $\gamma \in \mathbb{R}^+$.

4.1.2.2 Normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ a tempo discreto

A norma \mathcal{H}_2 para o sistema com saltos a tempo discreto pode ser definida como se segue.

Definição 8:

Se o sistema (4.2) for estável, então a norma \mathcal{H}_2 é dada por

$$\| \mathcal{G} \|_2^2 = \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^N \pi_{0i} \| z^{s,i} \|_2^2, \quad (4.17)$$

onde $z^{s,i}$ representa a saída $z(0), z(1), \dots$ para $x(0) = 0$, $w(k) = e_s \delta(k)$, onde $e_s \in \mathbb{R}^m$ é a s -ésima coluna da matriz identidade $m \times m$ e $\delta(k)$ é o impulso unitário e $\pi_{0i} = \text{Prob}(\theta_0 = i \in \mathbb{K})$.

Um caso particular, é quando o sistema (4.2) se encontra em estado estacionário, assim a norma computada pela definição anterior é análoga a

$$\| \mathcal{G} \|_2^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left\{ z^\top(k) z(k) \right\}, \quad (4.18)$$

onde $z(k)$ é a saída do sistema e o sinal de entrada $w(k)$ é aleatório com igual intensidade em diferentes frequências (Costa *et al.*, 2005).

Em termos de LMIs a norma \mathcal{H}_2 para MJLS de sistemas a tempo discreto pode ser determinada conforme o seguinte teorema.

Teorema 12:

Considerando o sistema (4.2), a norma \mathcal{H}_2 para este sistema pode ser calculado por

$$\| \mathcal{G} \|_2^2 = \min \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{0i} \text{tr}(W_i), \quad (4.19)$$

onde $\pi_{0i} = \text{Prob}(\theta_0 = i \in \mathbb{K})$ e as matrizes $W_i = W_i^\top > 0$ e $P_i = P_i^\top > 0$ pertencem ao conjunto Φ , tais que as LMIs abaixo sejam satisfeitas para todo $i \in \mathbb{K}$

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ P_{pi}J_i & P_{pi} & \bullet \\ E_{zi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad e \quad \begin{bmatrix} P_i & \bullet & \bullet \\ P_{pi}A_i & P_{pi} & \bullet \\ C_{zi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad (4.20)$$

em que $P_{pi} = \sum_{j \in \mathbb{K}} p_{ij}P_j$.

A norma \mathcal{H}_∞ estabelece um limitante para a influência da perturbação w desconhecidas, porém de norma limitada, isto é $w \in \mathcal{L}_{d_2}^2$ na saída $z(k)$ do sistema.

A norma \mathcal{H}_∞ para MJLS a tempo discreto é estabelecida conforme a definição a seguir.

Definição 9:

A norma \mathcal{H}_∞ do sistema estável (4.2), da entrada w para a saída z , é dada por

$$\| \mathcal{G} \|_\infty^2 = \sup_{0 \neq w, \theta_0 \in \mathbb{K}} \frac{\| z \|_2^2}{\| w \|_2^2}, \quad (4.21)$$

onde a perturbação w pertence a classe \mathcal{L}_{d_2} .

Em termos de LMIs a norma \mathcal{H}_∞ para MJLS a tempo discreto pode ser obtida pelo seguinte teorema, cuja prova está em (Seiler; Sengupta, 2003).

Teorema 13:

O sistema (4.2) é estável e satisfaz a restrição de norma $\| \mathcal{G} \|_\infty^2 < \gamma^2$ se, e somente se, existirem matrizes $P_i = P_i^\top > 0$, tais que as desigualdades matriciais lineares sejam válidas para todo $i \in \mathbb{K}$

$$\begin{bmatrix} A_i & J_i \\ C_{zi} & E_{zi} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P_{pi} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & J_i \\ C_{zi} & E_{zi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.22)$$

onde $\gamma \in \mathbb{R}^+$ e $P_{pi} = \sum_{j \in \mathbb{K}} p_{ij}P_j$.

Nas referências mencionadas podemos encontrar um maior detalhamento e exemplos ilustrativos relativos à estabilidade e as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

² Definido como a razão $\|z\|^2/\|w\|^2$ sendo z a resposta a uma entrada w .

4.1.3 Síntese de realimentação de estado

A realimentação de estado é um controle realizado a partir dos estados medidos do sistema e de uma lei de controle definida por um ganho de realimentação.

Em sistemas com saltos markovianos, caso o modo esteja disponível para o controlador, podemos projetar para cada modo um ganho K_i para todo valor de $i \in \mathbb{K}$. Portanto, neste tipo de projeto o objetivo é determinar o conjunto de ganhos de realimentação de estado \mathcal{K} que estabilize e minimize um critério de desempenho escolhido.

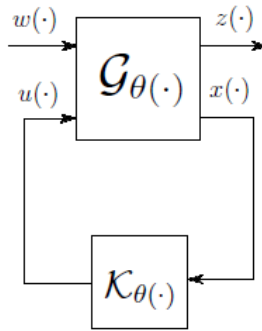


Figura 3 – Controle por realimentação de estado.

A Figura 3 mostra o diagrama de blocos para o controle por realimentação de estado. A seguir, os projetos de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ por realimentação de estado para sistemas markovianos a tempo contínuo e discreto são enunciados.

4.1.3.1 Síntese de realimentação de estado \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ a tempo contínuo

Considere o sistema (4.1) a ser controlado e a entrada de controle $u(t)$, tal que

$$u(t) = K(\theta_t)x(t), \quad (4.23)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é a variável de estado, $\theta_t \in \mathbb{K}$ é uma variável aleatória e $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

O sistema (4.1) em malha fechada será dado ao substituir a entrada $u(t)$ em \mathcal{G} , assim temos

$$\mathcal{G}_c : \begin{cases} \dot{x}(t) &= (A(\theta_t) + B(\theta_t)K(\theta_t))x(t) + J(\theta_t)w(t) \\ z(t) &= (C_z(\theta_t) + D_z(\theta_t)K(\theta_t))x(t) + E_z(\theta_t)w(t) \end{cases} . \quad (4.24)$$

A síntese de controladores para o sistema (4.24) é mostrada a seguir, maiores detalhes e explicações referentes à prova de necessidade e de suficiência das condições em forma de LMIs, confira em (Cardeliquio, 2014).

Teorema 14:

Seja o sistema (4.24) e fazendo $E_z(\theta_t)$ nulo, para todo valor de $i \in \mathbb{K}$, existe um controle por realimentação de estado, tal que

$$\| \mathcal{G}_c \|_2^2 = \min_{i \in \mathbb{K}} \sum \pi_{0i} \text{tr}(W_i), \quad (4.25)$$

se, e somente se, existirem matrizes simétricas $X_i > 0$, $W_i > 0$, $Z_{ij} > 0$ e matrizes Y_i e H_i de dimensões compatíveis que satisfaçam as seguintes LMIs

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet \\ J_i & X_i \end{bmatrix} > 0 \quad e \quad \begin{bmatrix} Z_{ij} & \bullet \\ H_i & X_j \end{bmatrix} > 0 \quad i \neq j, \quad (4.26)$$

$$\begin{bmatrix} A_i X_i + X_i A_i^\top + B_i Y_i + Y_i^\top B_i^\top + \lambda_{ii} X_i & \bullet & \bullet \\ X_i & -H_i - H_i^\top + \Psi_i & \bullet \\ C_{zi} X_i + D_{zi} Y_i & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.27)$$

para todo $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, $\pi_{0i} = \text{Prob}(\theta_0 = i \in \mathbb{K})$, $\Psi_i = \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} Z_{ij}$ para $j \neq i$. O ganho de realimentação de estado é então dado por

$$K_i = Y_i X_i^{-1}, \quad (4.28)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$.

O próximo teorema apresenta o controle por realimentação de estado \mathcal{H}_∞ .

Teorema 15:

Existe um controle por realimentação de estado tal que

$$\| \mathcal{G}_c \|_\infty^2 = \min \gamma^2, \quad (4.29)$$

se, e somente se, existirem matrizes simétricas $X_i > 0$, $Z_{ij} > 0$ e matrizes Y_i e H_i de dimensões compatíveis que satisfaçam as seguintes LMIs

$$\begin{bmatrix} A_i X_i + X_i A_i^\top + B_i Y_i + Y_i^\top B_i^\top + \lambda_{ii} X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ J_i^\top & -\gamma^2 I & \bullet & \bullet \\ X_i & 0 & -H_i - H_i^\top + \Psi_i & \bullet \\ C_{zi} X_i + D_{zi} Y_i & E_{zi} & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.30)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{ij} & \bullet \\ H_i & X_j \end{bmatrix} > 0, \quad i \neq j, \quad (4.31)$$

para todo $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, um dado $\gamma \in \mathbb{R}^+$ e $\Psi_i = \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} Z_{ij}$ para $j \neq i$. Caso estas condições sejam satisfeitas, o ganho de realimentação de estado é dado por

$$K_i = Y_i X_i^{-1}, \quad (4.32)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$.

4.1.3.2 Síntese de realimentação de estado \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ a tempo discreto

Considere o sistema (4.2) a ser controlado, se fechamos a malha para este sistema substituindo a entrada $u(k) = K(\theta_k)x(k)$, temos

$$\mathcal{G}_c : \begin{cases} x(k+1) &= (A(\theta_k) + B(\theta_k)K(\theta_k))x(k) + J(\theta_k)w(k) \\ z(k) &= (C_z(\theta_k) + D_z(\theta_k)K(\theta_k))x(k) + E_z(\theta_k)w(k) \end{cases}, \quad (4.33)$$

onde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é a variável de estado, $\theta_k \in \mathbb{K}$ é uma variável aleatória e $u(k) \in \mathbb{R}^m$.

A síntese de controladores para o sistema (4.33) é mostrada a seguir, maiores detalhes e explicações referentes à prova de necessidade e de suficiência das condições em forma de LMIs veja em (Oliveira, 2014).

Teorema 16:

Existem controladores por realimentação de estado, tal que

$$\|\mathcal{G}_c\|_2^2 = \min \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{0i} \text{tr}(W_i), \quad (4.34)$$

se, e somente se, existirem matrizes simétricas $W_i > 0, X_i > 0, Z_{ij} > 0$ e matrizes H_i, G_i e Y_i , de dimensões compatíveis que satisfaçam as seguintes LMIs

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ J_i & H_i + H_i^\top - \Psi_i & \bullet \\ E_{zi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad (4.35)$$

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^\top - X_i & \bullet & \bullet \\ A_i G_i + B_i Y_i & H_i + H_i^\top - \Psi_i & \bullet \\ C_{zi} G_i + D_{zi} Y_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad (4.36)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{ij} & \bullet \\ H_i & X_j \end{bmatrix} > 0, \quad (4.37)$$

para todo $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, $\pi_{0i} = \text{Prob}(\theta_0 = i \in \mathbb{K})$ e $\Psi_i = \sum_{j \in \mathbb{K}} p_{ij} Z_{ij}$. Se essas condições são satisfeitas, os controladores são obtidos por

$$K_i = Y_i G_i^{-1}, \quad (4.38)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$.

O Teorema 17 aborda a síntese por realimentação de estado \mathcal{H}_∞ .

Teorema 17:

Existem controladores de realimentação de estados que satisfazem

$$\| \mathcal{G}_c \|_\infty^2 = \min \gamma, \quad (4.39)$$

se, e somente se, existem matrizes simétricas $X_i > 0, Z_{ij} > 0$, e matrizes G_i, Y_i, H_i de dimensões compatíveis satisfazendo as LMIs

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^\top - X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ A_i G_i + B_i Y_i & J_i & H_i + H_i^\top - \Psi_i & \bullet \\ C_i G_i + D_i Y_i & E_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad (4.40)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{ij} & \bullet \\ H_i & X_j \end{bmatrix} > 0, \quad (4.41)$$

para todo $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e $\Psi_i = \sum_{j \in \mathbb{K}} p_{ij} Z_{ij}$. Em caso afirmativo, os ganhos de realimentação de estados são dados por

$$K_i = Y_i G_i^{-1}, \quad (4.42)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$.

4.1.4 Filtragem

O projeto de filtros, tanto a tempo contínuo quanto a tempo discreto, que minimizam as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ do erro de estimação são apresentados neste tópico.

O problema de filtragem consiste em estimar uma saída de interesse z , a partir de uma saída medida y . Assim, determinar um filtro adequado \mathcal{F} que estabilize e minimize um critério de desempenho escolhido considerando o erro de estimação da saída e . O diagrama de blocos da Figura 4 representa o esquema do filtro.

Os projetos de filtros \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para o sistema markoviano a tempo contínuo e discreto são enunciados a seguir. Para maiores detalhes, incluindo as provas de necessidade e de

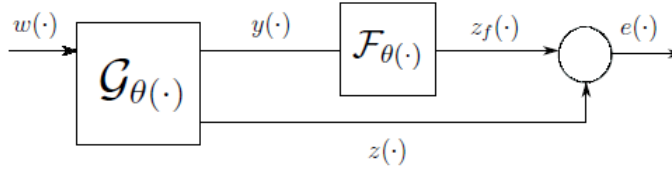


Figura 4 – Filtragem.

suficiência das condições em LMIs, veja nas teses (Cardeliquio, 2014), (Gonçalves, 2009) e no artigo (Silva; Gonçalves, no prelo) que está em via de publicação.

4.1.4.1 Filtragem \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ a tempo contínuo

Seja o sistema (4.1) com entrada $u(t)$ nula e o filtro de ordem completa

$$\mathcal{F} : \begin{cases} \dot{x}_f(t) &= A_f(\theta_t)x_f(t) + B_f(\theta_t)y(t) \\ z_f(t) &= C_f(\theta_t)x_f(t) + D_f(\theta_t)y(t) \end{cases}, \quad (4.43)$$

onde $x_f(t) \in \mathbb{R}^n$, $x_f(0) = 0$, $z_f(t) \in \mathbb{R}^r$, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ e as matrizes A_f , B_f , C_f e D_f têm dimensões compatíveis para todo $i \in \mathbb{K}$. Ao fechar a malha obtemos o sistema dinâmico para o erro de estimação $e(t) = z(t) - z_f(t)$

$$\mathcal{G}_f : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}(\theta_t)\tilde{x}(t) + \tilde{J}(\theta_t)w(t) \\ \tilde{e}(t) &= \tilde{C}(\theta_t)\tilde{x}(t) + \tilde{E}(\theta_t)w(t) \end{cases}, \quad (4.44)$$

no qual, as matrizes aumentadas que definem a sua realização são dadas por

$$\tilde{A}(\theta_t) = \begin{bmatrix} A(\theta_t) & 0 \\ B_f(\theta_t)C_y(\theta_t) & A_f(\theta_t) \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

$$\tilde{J}(\theta_t) = \begin{bmatrix} J(\theta_t) \\ B_f(\theta_t)E_y(\theta_t) \end{bmatrix}, \quad (4.46)$$

$$\tilde{C}_z(\theta_t) = \begin{bmatrix} C_z(\theta_t) - D_f(\theta_t)C_y(\theta_t) & -C_f(\theta_t) \end{bmatrix}, \quad (4.47)$$

$$\tilde{E}(\theta_t) = \begin{bmatrix} E_z(\theta_t) - D_f(\theta_t)E_y(\theta_t) \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

em que $\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t)^\top & x_f(t)^\top \end{bmatrix}^\top$ é o vetor de estado aumentado.

Estamos interessados em projetar um filtro que minimize as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ do erro de estimação do sistema (4.44). Desta forma, o objetivo é resolver os problemas

$$\min_{A_{fi}, B_{fi}, C_{fi}, D_{fi}} \| \mathcal{G}_f \|_2^2 \quad (4.49)$$

ou

$$\min_{A_{fi}, B_{fi}, C_{fi}, D_{fi}} \| \mathcal{G}_f \|_\infty^2. \quad (4.50)$$

Os teoremas a seguir proporcionam uma formulação convexa em termos de LMIs, portanto, tratável computacionalmente, para os problemas (4.49) e (4.50).

Teorema 18:

Existe um filtro na forma de (4.43), para E_{zi} e D_f nulas, tal que

$$\| \mathcal{G}_f \|_2^2 = \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{0i} \text{tr}(W_i), \quad (4.51)$$

onde $\pi_{0i} = \text{Prob}(\theta_0 = i \in \mathbb{K})$ se, e somente se, existirem matrizes simétricas W_i , X_i e Z_i e matrizes M_i , L_i e K_i de dimensões compatíveis, tais que as seguintes LMIs sejam satisfeitas para todo $(i, j) \in \mathbb{K}$

$$\begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet \\ Z_i & X_i & \bullet \\ J_i^\top Z_i & J_i^\top X_i + E_{yi}^\top L_i^\top & W_i \end{bmatrix} > 0, \quad (4.52)$$

$$\begin{bmatrix} T_i(Z) & \bullet & \bullet \\ A_i^\top Z_i + X_i A_i + M_i + L_i C_{yi} + \Psi_i & T_i(X) + H_e(L_i C_{yi}) & \bullet \\ C_{zi} - K_i & C_{zi} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.53)$$

onde

$$\Psi_i = \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} Z_j, \quad (4.54)$$

$$T_i(Z) = H_e(A_i^\top Z_i) + \Psi_i \quad (4.55)$$

e

$$T_i(X) = H_e(A_i^\top X_i) + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} X_j. \quad (4.56)$$

Em caso afirmativo, um filtro adequado é dado pelas matrizes de estado

$$A_{fi} = (Z_i - X_i)^{-1} M_i, \quad (4.57)$$

$$B_{fi} = (Z_i - X_i)^{-1} L_i, \quad (4.58)$$

$$C_{fi} = K_i, \quad (4.59)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$.

Teorema 19:

Existe um filtro de ordem completa com realização (4.43), satisfazendo a restrição de norma

$$\| \mathcal{G}_f \|_\infty^2 < \gamma, \quad (4.60)$$

onde $\gamma \in \mathbb{R}^+$ se, e somente se, existirem matrizes simétricas X_i e Z_i e matrizes M_i , L_i , N_i e K_i de dimensões compatíveis, tais que as seguintes LMIs são satisfeitas para todo $(i, j) \in \mathbb{K}$

$$\begin{bmatrix} Z_i & Z_i \\ Z_i & X_i \end{bmatrix} > 0, \quad (4.61)$$

$$\begin{bmatrix} T_i(Z) & \bullet & \bullet & \bullet \\ A_i^\top Z_i + X_i A_i + M_i + L_i C_{yi} + \Psi_i & T_i(X) + H_e(L_i C_{yi}) & \bullet & \bullet \\ J_i^\top Z_i & J_i^\top X_i + E_{yi}^\top L_i^\top & -\gamma I & \bullet \\ C_{zi} - N_i C_{yi} - K_i & C_{zi} - N_i C_{yi} & E_{zi} - N_i E_{yi} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.62)$$

onde

$$\Psi_i = \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} Z_j, \quad (4.63)$$

$$T_i(Z) = H_e(A_i^\top Z_i) + \Psi_i \quad (4.64)$$

e

$$T_i(X) = H_e(A_i^\top X_i) + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} X_j. \quad (4.65)$$

Em caso afirmativo, um filtro adequado é dado pelas matrizes de estado

$$A_{fi} = (Z_i - X_i)^{-1} M_i, \quad (4.66)$$

$$B_{fi} = (Z_i - X_i)^{-1} L_i, \quad (4.67)$$

$$C_{fi} = K_i, \quad (4.68)$$

$$D_{fi} = N_i, \quad (4.69)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$.

4.1.4.2 Filtragem \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ a tempo discreto

Considere o sistema (4.2) com entrada $u(k)$ nula e o filtro de ordem completa

$$\mathcal{F} : \begin{cases} x_f(k+1) &= A_f(\theta_k)x_f(k) + B_f(\theta_k)y(k) \\ z_f(k) &= C_f(\theta_k)x_f(k) + D_f(\theta_k)y(k) \end{cases}, \quad (4.70)$$

onde $x_f(k) \in \mathbb{R}^n$, $x_f(0) = 0$, $z_f(k) \in \mathbb{R}^r$, $y(k) \in \mathbb{R}^q$ e as matrizes A_{fi} , B_{fi} , C_{fi} e D_{fi} para todo $i \in \mathbb{K}$ têm dimensões compatíveis.

Ao conectar o filtro com o sistema (4.2) temos

$$\mathcal{G}_f : \begin{cases} \tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}(\theta_k)\tilde{x}(k) + \tilde{J}(\theta_k)w(k) \\ e(k) &= \tilde{C}(\theta_k)\tilde{x}(k) + \tilde{E}(\theta_k)w(k) \end{cases}. \quad (4.71)$$

Ao fechar a malha obtemos o sistema dinâmico para o erro de estimação $e(k) = z(k) - z_f(k)$, em que $\tilde{x}(k) = [x(k)^\top x_f(k)^\top]^\top$ e as matrizes aumentadas que definem a sua realização são dadas por

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_{fi}C_{yi} & A_{fi} \end{bmatrix}, \quad (4.72)$$

$$\tilde{C}_i = \begin{bmatrix} C_{zi} - D_{fi}C_{yi} & -C_{fi} \end{bmatrix}, \quad (4.73)$$

$$\tilde{J}_i = \begin{bmatrix} J_i \\ B_{fi}E_{yi} \end{bmatrix}, \quad (4.74)$$

$$\tilde{E}_i = \begin{bmatrix} E_{zi} - D_{fi}E_{yi} \end{bmatrix}. \quad (4.75)$$

Tratando de sistemas markovianos a tempo discreto, estamos interessados em projetar um filtro que minimize as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ do erro de estimação do sistema (4.71). Desta forma, o objetivo é resolver os problemas

$$\min_{A_{fi}, B_{fi}, C_{fi}, D_{fi}} \|\mathcal{G}_f\|_2^2 \quad (4.76)$$

ou

$$\min_{A_{fi}, B_{fi}, C_{fi}, D_{fi}} \|\mathcal{G}_f\|_\infty^2. \quad (4.77)$$

Os teoremas a seguir proporcionam uma formulação em forma de LMIs, portanto, tratável computacionalmente, para os problemas (4.76) e (4.77).

Teorema 20:

Existe um filtro na forma de (4.70) satisfazendo a restrição de norma

$$\| \mathcal{G}_f \|_2^2 < \gamma, \quad (4.78)$$

onde $P = P^\top > 0$ se, e somente se, existirem matrizes simétricas W_i , X_i e Z_i e matrizes F_i, M_i, L_i e K_i de dimensões compatíveis, tais que as seguintes LMIs são satisfeitas para todo $(i, j) \in \mathbb{K}$

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ \Psi_i J_i & \Psi_i & \bullet & \bullet \\ \chi_i J_i + F_i E_{yi} & \Psi_i & \chi_i & \bullet \\ E_{zi} - K_i E_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad (4.79)$$

$$\begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_i & X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ \Psi_i A_i & \Psi_i A_i & \Psi_i & \bullet & \bullet \\ \chi_i A_i + F_i C_{yi} + M_i & \chi_i A_i + F_i C_{yi} & \Psi_i & \chi_i & \bullet \\ C_{zi} - K_i C_{yi} + L_i & C_{zi} - K_i C_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.80)$$

e

$$\| \mathcal{G}_f \|_2^2 = \min \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{0i} \text{tr}(W_i), \quad (4.81)$$

onde $\pi_{0i} = \text{Prob}(\theta_0 = i \in \mathbb{K})$, $\chi_i = \sum_{j \in \mathbb{K}} p_{ij} X_j$ e $\Psi_i = \sum_{j \in \mathbb{K}} p_{ij} Z_{ij}$. Em caso afirmativo, um filtro adequado é dado pelas matrizes de estado

$$A_{fi} = (\Psi_i - \chi_i)^{-1} M_i, \quad (4.82)$$

$$B_{fi} = (\Psi_i - \chi_i)^{-1} F_i, \quad (4.83)$$

$$C_{fi} = -L_i, \quad (4.84)$$

$$D_{fi} = K_i, \quad (4.85)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$.

Teorema 21:

Existe um filtro como em (4.70) satisfazendo a restrição de norma

$$\| \mathcal{G}_f \|_\infty^2 < \gamma, \quad (4.86)$$

onde $\gamma \in \mathbb{R}^+$ se, e somente se, existirem matrizes simétricas X_i, Z_i e matrizes M_i, L_i, F_i e K_i de dimensões compatíveis que satisfaçam as LMIs

$$\begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_i & \chi_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \gamma I & \bullet & \bullet & \bullet \\ \Psi_i A_i & \Psi_i A_i & \Psi_i J_i & \Psi_i & \bullet & \bullet \\ \chi_i A_i + F_i C_{yi} + M_i & \chi_i A_i + F_i C_{yi} & \chi_i J_i + F_i E_{yi} & \Psi_i & \chi_i & \bullet \\ C_{zi} - K_i C_{yi} + L_i & C_{zi} - K_i C_{yi} & E_{zi} - K_i E_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad (4.87)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$, $\chi_i = \sum_{j \in \mathbb{K}} p_{ij} X_j$ e $\Psi_i = \sum_{j \in \mathbb{K}} p_{ij} Z_j$. Em caso afirmativo, uma realização factível para filtro é dada pelas matrizes de estado

$$A_{fi} = (\Psi_i - \chi_i)^{-1} M_i, \quad (4.88)$$

$$B_{fi} = (\Psi_i - \chi_i)^{-1} F_i, \quad (4.89)$$

$$C_{fi} = -L_i, \quad (4.90)$$

$$D_{fi} = K_i, \quad (4.91)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$.

Os projetos de realimentação de estado e filtragem apresentados, a tempo contínuo ou a tempo discreto, são do tipo dependente do modo, isto é, o valor do modo de operação do sistema é disponível para o controlador e filtro, caso contrário temos o problema de independência do modo. O leitor interessado encontra maiores detalhes e exemplos ilustrativos sobre realimentação de estado e filtragem tanto a tempo contínuo quanto a tempo discreto nas referências citadas.

4.1.5 Sistemas com saltos markovianos e matrizes das taxas ou de probabilidades de transição incertas

Em todos os resultados das seções anteriores, assumimos o conhecimento da matriz das taxas ou de probabilidades de transição para a análise da estabilidade e a síntese de controladores e filtros para sistemas lineares com saltos markovianos tanto a tempo contínuo quanto a tempo discreto. No entanto, temos um problema quando alguns ou todos os elementos das matrizes Λ , ou Π são desconhecidos, ou incertos. A saída para esta inconveniência é utilizar

a ideia da combinação convexa, conforme é retratada nas referências (Gonçalves *et al.*, 2011), (Fioravanti *et al.*, 2013) e (Cardeliquio, 2014). Existem trabalhos na literatura, tais como em (Farias, 1998), no qual foram demonstrados teoremas com condições de não dependência afim com relação às taxas de transição, diferentemente da pesquisa do (Cardeliquio, 2014) em que tratou de condições afins, este fato possibilitou o uso da combinação convexa, ou melhor, o uso de incertezas politópicas nas taxas e probabilidades através de LMIs.

Da combinação convexa politópica, podemos considerar que os elementos da matriz das taxas ou de probabilidades são incertos, mas pertencem a um conjunto convexo com vértices conhecidos, tornando-se assim um caso particular de incerteza politópica. Para o caso discreto, escrevemos

$$\wp = \text{co}\{\Pi^{(v)}\}, \quad (4.92)$$

onde \wp é o conjunto politópico das matrizes desconhecidas e $\Pi^{(v)}$ são os vértices ou as matrizes conhecidas para todo $v \in \mathbb{V}$, sendo $\mathbb{V} \in \{1, 2, \dots, l\}$, em que l é o número de vértices.

Assumimos que Λ , para o caso contínuo, ou Π , para o caso discreto, não sejam conhecidas, porém, conhecemos os vértices de um conjunto convexo Γ e \wp , respectivamente. Podemos reescrever o conceito de (4.92) para o caso contínuo, temos

$$\Gamma = \text{co}\{\Lambda^{(v)}\}. \quad (4.93)$$

Todos os teoremas anteriores podem ser facilmente adaptados para o caso com incertezas politópicas, pois as LMIs são afins em relação aos parâmetros λ_{ij} ou p_{ij} . Desta forma, aplicando as restrições em cada um dos vértices do politopo, o controlador ou o filtro obtido será capaz de garantir um limitante superior para a norma (neste caso denominado custo garantido) para quaisquer taxas ou probabilidades de transição incertas que estejam contidas no politopo, porém nesta situação, a condição será apenas suficiente, sendo, portanto, uma solução subótima, ver em (Cardeliquio, 2014). Podemos considerar este fato devido à matriz incerta de probabilidades de transição abranger uma matriz de transição completamente conhecida, assim obtemos um limitante superior, pois o desempenho é robusto, ou seja, temos a garantia de que a norma será menor que o limitante para qualquer matriz das taxas ou de probabilidades dentro do conjunto.

4.1.6 Exemplos

Nesta seção vamos ilustrar numericamente os teoremas clássicos com taxas ou probabilidades de transição com parâmetros incertos, porém politópicos. Tais exemplos foram resolvidos utilizando o *solver* SeDuMi e o *parser* Yalmip no *Matlab(R2018a)*. De forma sucinta, pois o mesmo entendimento poderá ser aplicado para casos de filtragem, vamos abordar

primeiramente para o contexto da realimentação de estado a tempo contínuo e em seguida para o tempo discreto.

4.1.6.1 Realimentação de estado a tempo contínuo com matriz das taxas incerta

Vamos determinar os ganhos de realimentação de estado que minimizam a norma \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ do sistema (4.1) em malha fechada com condição inicial $\pi_{0i} = [0,6 \ 0,4]$ e taxas de transição desconhecidas, porém politópicas, supondo que Λ seja incerta, tal como

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\rho & \rho \\ \varpi & -\varpi \end{bmatrix}, \quad (4.94)$$

onde os parâmetros ρ e ϖ são valores imprecisos, porém pertencem a um intervalo dado, ou seja, $\rho \in [3 \ 7]$ e $\varpi \in [1 \ 3]$. Portanto, a combinação convexa pode ser dada por

$$\Lambda = \alpha_1 \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} -7 & 7 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} -7 & 7 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad (4.95)$$

com $\sum_{v \in \mathbb{V}} \alpha_v = 1$, $\alpha_v > 0$, onde $\mathbb{V} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Este exemplo é baseado em (Cardeliquio, 2014). Considerando as matrizes para o sistema (4.1), ou seja

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0,7 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}, J_1 = J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 \\ 0,1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.96)$$

$$C_{z1} = C_{z2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{z1} = D_{z2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, E_{z1} = E_{z2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.97)$$

Para o caso das taxas incertas, pelo Teorema 14 computamos o custo garantido \mathcal{H}_2 o valor de 1,8251 e obtivemos os ganhos robustos $Kr_1 = [-1,4058 \ -0,9577]$ e $Kr_2 = [-1,5458 \ -0,7989]$. Do Teorema 15, calculamos o custo garantido \mathcal{H}_∞ o valor de 2,2183 e obtivemos os ganhos robustos $Kr_1 = [-603,7931 \ -65,0041]$ e $Kr_2 = [-129,1131 \ -22,2707]$ para taxas incertas. Se consideramos uma matriz conhecida Λ no intervalo considerado, isto é, para a matriz das taxas $\Lambda = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, obtivemos a norma \mathcal{H}_2 o valor de 1,2516 e ganhos ótimos de $Ko_1 = [-0,6880 \ -0,4164]$ e $Ko_2 = [-0,7722 \ -0,3778]$. A norma \mathcal{H}_∞ para esta matriz das taxas em particular é de 2,0693 e os

ganhos ótimos de $Ko_1 = [-3,6049 \quad -2,3972]$ e $Ko_2 = [-4,0858 \quad -2,0734]$. Como esperado, para uma dada matriz das taxas de transição dentro do conjunto politópico, tanto para norma \mathcal{H}_2 quanto para norma \mathcal{H}_∞ , foram obtidos valores inferiores aos custos garantidos.

Tabela 1 – Análise de desempenho - Realimentação de estado a tempo contínuo.

K_i		\mathcal{H}_2	\mathcal{H}_∞
Ko_i	Λ	1,2516	2,0693
Kr_i	Λ	1,3907	2,1388



4.1.6.2 Realimentação de estado a tempo discreto com matriz de probabilidades incerta

Este exemplo está em (Oliveira, 2019). Entretanto, consideramos o sistema (4.2) de 3 modos e matrizes dadas a seguir

$$A_i = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 & -0,7 & -0,6 \\ 0,1 & 0,3 & 1 & 0 \\ 0,3 & -0,4 & 0,8 & 0,5 \\ 0,1 & 0 & -0,4 & 0,9 \end{bmatrix} \quad \forall i \in \mathbb{K}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 1,8 \\ 0,4 & -1,4 \\ 1,2 & 1,5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.98)$$

$$B_2 = -B_1 0,2, \quad B_3 = B_1 0,5 \quad \text{e} \quad J_i = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad \forall i \in \mathbb{K}. \quad (4.99)$$

Para o cálculo do desempenho \mathcal{H}_2 , consideramos

$$C_{zi} = \begin{bmatrix} I_{4 \times 4} \\ 0_{2 \times 4} \end{bmatrix}, D_{zi} = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} \\ 0_{4 \times 2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_{zi} = [0_{3 \times 2}] \quad \forall i \in \mathbb{K}. \quad (4.100)$$

Para o cálculo do desempenho \mathcal{H}_∞ , consideramos

$$C_{zi} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{zi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_{zi} = [0_{3 \times 2}] \quad \forall i \in \mathbb{K}. \quad (4.101)$$

A realimentação de estado que minimiza as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ do sistema (4.2) em malha fechada com condição inicial $\pi_{0i} = [0,6 \quad 0,2 \quad 0,2]$ e probabilidades de transição desconhecidas, porém politópicas, supondo que Π seja de

$$\Pi = \begin{bmatrix} \rho & \varpi & 0,1 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,5 & 0,1 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad (4.102)$$

onde ρ e ϖ são valores incertos, tais que $\rho \in [0,1 \ 0,7]$ e $\varpi \in [0,2 \ 0,8]$. Neste contexto, a matriz de probabilidades incerta politópica Π é dado por

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,5 & 0,1 & 0,4 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,5 & 0,1 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad (4.103)$$

com $\sum_{v \in \mathbb{V}} \alpha_v = 1$ e para todo $\alpha_v > 0$, onde $\mathbb{V} = \{1,2\}$.

Aplicando o Teorema 16 para o caso das probabilidades incertas, computamos o custo garantido \mathcal{H}_2 o valor de 1,4564 e obtivemos ganhos robustos de

$$\begin{aligned} \text{Kr}_1 &= \begin{bmatrix} -0,1185 & 0,0861 & -0,6705 & 0,3191 \\ -0,1088 & 0,0874 & 0,1570 & -0,3497 \end{bmatrix}, \\ \text{Kr}_2 &= \begin{bmatrix} -0,6982 & -0,0621 & 0,7477 & -0,2621 \\ 0,3631 & -0,9715 & -0,0459 & 0,5877 \end{bmatrix}, \\ \text{Kr}_3 &= \begin{bmatrix} -0,4627 & 0,1432 & -1,0208 & 0,1885 \\ -0,2002 & 0,0361 & 0,2146 & -0,6610 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Do Teorema 17, calculamos o custo garantido \mathcal{H}_∞ o valor de 1,0844 e obtivemos os ganhos robustos para as probabilidades incertas de

$$\begin{aligned} \text{Kr}_1 &= \begin{bmatrix} -0,2293 & -0,0112 & -1,1684 & -0,1918 \\ 0,0017 & 0,1875 & 0,3364 & -0,0560 \end{bmatrix}, \\ \text{Kr}_2 &= \begin{bmatrix} 1,1693 & 1,3016 & 8,0643 & 0,5987 \\ -0,0008 & -0,1767 & -0,3180 & 0,0536 \end{bmatrix}, \\ \text{Kr}_3 &= \begin{bmatrix} -0,4719 & -0,3185 & -2,8564 & -0,3060 \\ 0,0000 & 0,2282 & 0,4118 & -0,0702 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se consideramos uma matriz sem incerteza Π para as probabilidades que estão dentro do intervalo considerado, isto é

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,5 & 0,1 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

Obtivemos a norma \mathcal{H}_2 de 1,4378 e ganhos ótimos de

$$\text{Ko}_1 = \begin{bmatrix} -0,1809 & 0,0875 & -0,6706 & 0,2248 \\ -0,1182 & 0,0880 & 0,1574 & -0,3741 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{O_2} = \begin{bmatrix} -0,6983 & -0,0592 & 0,7386 & -0,2575 \\ 0,3596 & -0,9747 & -0,0373 & 0,5801 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{O_3} = \begin{bmatrix} -0,4668 & 0,1428 & -1,0159 & 0,1872 \\ -0,1956 & 0,0345 & 0,2097 & -0,6589 \end{bmatrix}.$$

Para a norma \mathcal{H}_∞ de 1,0577 e ganhos ótimos de

$$\mathbf{K}_{O_1} = \begin{bmatrix} -0,2372 & -0,0493 & -1,2301 & -0,1893 \\ 0,0003 & 0,1808 & 0,3263 & -0,0550 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{O_2} = \begin{bmatrix} 1,1768 & 1,4174 & 8,2762 & 0,5783 \\ -0,0013 & -0,1880 & -0,3383 & 0,0562 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{O_3} = \begin{bmatrix} -0,4741 & -0,3374 & -2,8921 & -0,3052 \\ 0,0006 & 0,2354 & 0,4246 & -0,0714 \end{bmatrix}.$$

Portanto, este projeto de realimentação de estado garante a norma para qualquer elemento que esteja contido dentro do politopo de probabilidades com custo garantido \mathcal{H}_2 de 1,4564 e custo garantido \mathcal{H}_∞ de 1,0844.

Tabela 2 – Análise de desempenho - Realimentação de estado a tempo discreto.

\mathbf{K}_i		\mathcal{H}_2	\mathcal{H}_∞
\mathbf{K}_{O_i}	Π	1,4378	1,0577
\mathbf{K}_{r_i}	Π	1,4463	1,0644



5 Caracterização dos vértices do politopo

Este capítulo aborda os principais resultados desta dissertação. O objetivo é a caracterização dos vértices do politopo das taxas ou de probabilidades de transição que geram um dado conjunto de probabilidades estacionárias. Detalhamos o método utilizado para a determinação de tais vértices, em seguida, apresentamos exemplos numéricos.

5.1 Transições, probabilidades estacionárias e politopo convexo

Entendemos que as equações (3.12) para o caso contínuo e (3.5) para o caso discreto devem ser satisfeitas quando uma cadeia de Markov está em estado estacionário. Adicionalmente, se consideramos as restrições de normalização do vetor de probabilidades estacionárias e das matrizes Λ e Π , podemos modelar estas informações no sistema \mathcal{S}_c para a cadeia de Markov a tempo contínuo, isto é

$$\mathcal{S}_c = \left\{ \begin{array}{ll} \pi_{\text{est}} \Lambda = & \mathbf{0} \\ \Lambda \mathbf{1} = & \mathbf{0} \\ \lambda_{ii} \leq & 0 \\ \lambda_{ij} \geq & 0 \\ \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{\text{est}ij} = & 1 \\ |\lambda_{ii}| = & \frac{1}{\tau_{\min_i}} \end{array} \right. , \quad (5.1)$$

onde $\Lambda \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é a variável e suas componentes $\lambda_{ij} \geq 0$ exceto quando $i \neq j$, e o parâmetro τ_{\min} é o tempo médio mínimo de permanência no modo i . Já, para o caso a tempo discreto, temos o sistema \mathcal{S}_d , dado por

$$\mathcal{S}_d = \left\{ \begin{array}{ll} \pi_{\text{est}} \Pi = & \pi_{\text{est}} \\ \Pi \mathbf{1} = & \mathbf{1} \\ p_{ij} \geq & 0 \\ \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{\text{est}ij} = & 1 \end{array} \right. , \quad (5.2)$$

em que $\Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é a variável e tem componentes $p_{ij} \geq 0$ para todo $(i, j) \in \mathbb{K}$. Além disso, para ambos os sistemas o vetor $\pi_{\text{est}} \in \mathbb{R}^{1 \times N}$ sendo N o número de modos da cadeia de Markov. Ainda, π_{est} deve ser maior ou igual a zero, sendo que a soma dos elementos de π_{est} é 1, $\mathbf{1}$ e $\mathbf{0}$ são vetores compostos de uns e de zeros.

As regiões para as matrizes Λ e Π em (5.1) e (5.2) podem ser representados por uma combinação convexa politópica. Ilustramos este fato para um caso simples, uma cadeia de

Markov a tempo discreto com apenas dois modos. A matriz Π pode ser parametrizada por dois parâmetros α e β , ou

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

onde $\alpha \in [0, 1]$ e $\beta \in [0, 1]$.

Substituindo a matriz (5.3) no sistema (5.2), temos

$$\begin{bmatrix} 1 - \alpha & \beta \\ \alpha & 1 - \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

em que π_1 e π_2 são dados, tais que $\pi_1 + \pi_2 = 1$ e que nos interessa caracterizar o espaço em que se encontram α e β produzindo as seguintes equações

$$\begin{aligned} \alpha\pi_1 - \beta\pi_2 &= 0 \\ -\alpha\pi_1 + \beta\pi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Desconsiderando uma das equações por ser redundante e isolando β , ou seja, $\beta = \alpha \frac{\pi_1}{\pi_2}$ e substituindo na matriz parametrizada Π em (5.3), temos

$$\Pi = (1 - \alpha) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\pi_1}{\pi_2} & 1 - \frac{\pi_1}{\pi_2} \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

é o mesmo que na forma politópica

$$\Pi = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\pi_1}{\pi_2} & 1 - \frac{\pi_1}{\pi_2} \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Portanto, a matriz de probabilidade Π de ordem 2 pode ser reescrita na forma de um politopo convexo, no qual $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\pi_1}{\pi_2} & 1 - \frac{\pi_1}{\pi_2} \end{bmatrix}$ são os vértices desse conjunto politópico.

De fato, raciocínio análogo pode ser feito para matrizes de probabilidades de transição de ordem superior, porém, neste caso é difícil atingir algebricamente uma forma politópica. Como veremos a seguir, podemos utilizar o conceito de Programação Linear como as soluções básicas para definir numericamente os vértices do politopo.

Não é difícil colocar os sistemas (5.1) e (5.2) na forma padrão das restrições de um problema de Programação Linear (PL). De acordo com (Bazaraa *et al.*, 2010), um problema de

Programação Linear é um problema de otimização em que tanto a função objetivo quanto as restrições são lineares, como no formato

$$\begin{aligned} \min \quad & f^\top x \\ \text{sujeito a: } \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

em que $f \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$ são dados e $x \in \mathbb{R}^n$ são as variáveis de decisão. A região fechada formada pelo politopo factível \mathbb{X} e pelas restrições é sempre convexa e contém todas as soluções básicas factíveis. Na forma padrão, a solução básica factível é um ponto que atende às restrições do problema, incluídas as restrições de não negatividade e não incluída a função a ser otimizada, isto é na região fechada, as soluções básicas factíveis não precisam otimizar a função objetivo. Uma forma de calcular as soluções básicas factíveis, é pelo método de soluções básicas.

Definição 10:

Considere o sistema linear $Ax = b$, com $x \geq 0$, sendo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m < n$, e suponha que o posto(A) = m . Suponha que, após um possível rearranjo de colunas, A possa ser escrita como $A = [B \ N]$, com B quadrada e não-singular. A solução x do sistema linear $Ax = b$ é dada por

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}, \quad \text{com } x_B = B^{-1}b \quad \text{e} \quad x_N = 0, \quad (5.9)$$

é chamada de solução básica. Se, além disso, $x_B \geq 0$ então x é uma solução básica factível do sistema $Ax = b, x \geq 0$. As variáveis x_B são chamadas de variáveis básicas ou dependentes e as variáveis x_N são chamadas de variáveis não-básicas (ou independentes). A matriz B é chamada de matriz básica e a matriz N é chamada de matriz não básica. Se $x_B > 0$, então a solução básica é dita não-degenerada, caso alguma componente de x_B seja nula, então a solução básica é degenerada.

A importância da definição acima está na correspondência entre soluções básicas factíveis e pontos extremos do politopo, como demonstrada em (Bazaraa *et al.*, 2010) e anunciado no Teorema 22.

Teorema 22:

Um ponto \bar{x} é ponto extremo do politopo factível \mathbb{X} de (5.8) se, e somente se, \bar{x} for uma solução básica factível do sistema definido pelas restrições de (5.8).

Portanto, realizando a busca por soluções básicas factíveis nas restrições (5.1) ou (5.2), podemos determinar o conjunto politópico Γ ou \emptyset . Os vértices serão as matrizes das taxas Λ ou de probabilidades Π . Desta forma, dada as probabilidades estacionárias π_{est} podemos calcular as soluções básicas das restrições lineares e, a partir dessas, representar os vértices do politopo procurado Γ ou \emptyset .

Realmente, podemos utilizar o método de soluções básicas para determinar as soluções básicas de um problema de PL, reescrevendo o sistema que está sujeito a saltos markovianos no estado estacionário no padrão de um problema de otimização PL. À vista disso, conseguimos de forma procedimental computar todos os pontos extremos de uma região factível de um problema de otimização linear, como já se sabe, a solução está necessariamente em um dos pontos extremos, podemos ao menos teoricamente resolver o problema de PL por enumeração. Em geral, um limitante superior para o número de soluções básicas do sistema $Ax = b, x \geq 0$, é dado por

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (5.10)$$

De (5.10), a busca da solução ótima de uma PL por enumeração pode ficar proibitiva para um número muito grande de extremos, também a nossa região de matrizes de transição gerada por um vetor de probabilidades estacionárias pode ficar proibitiva do ponto de vista computacional.

Ademais, outra consideração importante é assumir que a matriz A tenha posto completo, ou melhor, que A tenha $m < n$ linhas linearmente independentes, pois linhas linearmente dependentes na matriz A criam restrições redundantes, isto é válido tanto para a cadeia de Markov a tempo contínuo quanto para o tempo discreto.

Em relação ao sistema a tempo contínuo surge um problema pelo fato das restrições de (5.1) serem iguais a zero, o que equivale a um vetor $b = 0$ em (5.9), conduzindo a uma solução básica nula, isto é x_b e x_n iguais a zero. Nesta situação, o tempo médio de permanência mínimo τ_{\min} deve ser imposto, bem como as restrições adicionais de (2.15) às restrições (5.1), ou seja

$$|\lambda_{ii}| \leq \lambda_{\max_i} = \frac{1}{\tau_{\min_i}}. \quad (5.11)$$

Para encontrar uma solução básica, é preciso limitar o valor absoluto de λ_{ii} , o que implica em assumir um tempo de permanência médio mínimo para o modo i . Isso faz sentido prático, pois um modo com tempo de permanência médio tendendo a zero é um modo que praticamente não é visitado.

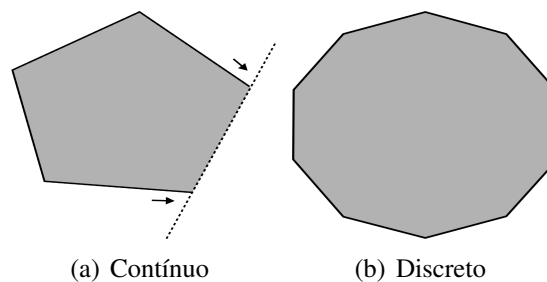


Figura 5 – Região politópica do sistema MJLS no estado estacionário.

Em geral, não é possível encontrar as soluções básicas analiticamente, em especial para restrições de ordem elevada, desta forma torna-se necessário o uso de métodos computacionais para a resolução, em particular, utilizaremos do ambiente *Matlab(R2018a)* neste trabalho.

A Figura 5 ilustra em perspectiva geométrica, a região politópica encontrada para o sistema com saltos markovianos a tempo contínuo e a tempo discreto no estado estacionário. Podemos observar que o conjunto de matrizes das taxas de transição que geram um mesmo vetor de probabilidades estacionárias para uma cadeia de Markov em tempo contínuo pode ser representado por um politopo ilimitado cônico, ou seja, limitado pelos vértices e as direções que são representadas pelas setas. A delimitação da região é dada pelos tempos de permanência médio mínimo τ_{\min} de cada modo. Diferentemente do caso contínuo, para uma cadeia de Markov em tempo discreto a região politópica é perfeitamente estabelecida apenas pelos seus vértices.

A seguir, apresentamos os procedimentos iterativos para calcular as matrizes das taxas ou de probabilidades de transição utilizando o método de soluções básicas. Nos algoritmos entramos com o valor da ordem da matriz das taxas ou de probabilidades em n e os valores das componentes do vetor estacionário em π_{iest} para todo $i \in \mathbb{K}$. Devemos entrar com os tempos médios mínimos de permanência τ_{\min_i} para todo $i \in \mathbb{K}$ no Algoritmo 1, já que caracteriza as taxas de transição. O Algoritmo 2 computa as matrizes de probabilidades.

Algoritmo 1 Caracteriza as matrizes das taxas por soluções básicas.

Input: $n, \pi_{iest}, \tau_{\min_i}, \forall i \in \mathbb{K}$

```

if  $n$ 
    if  $\pi_{iest} \geq 0, \sum \pi_{iest} = 1$  then
        do  $A, b, n_A, n_b$ 
        Compute  $\Lambda$ 
        if  $n_A \geq m_A$  then
            Compute  $t$  e  $n_v$  usando (5.1) e (5.11)
            for  $i = 1 : n_v$ 
                 $y \leftarrow 0$ 
                Compute  $v$ 
                if  $v \geq 0, v \neq \infty, v \neq -\infty$  then
                    Compute  $y \leftarrow x_{s_i}$  e  $v_c \leftarrow y$ 
                end
            repeat
        end
        Eliminar colunas iguais
    
```

```

    end
    else erro
    end
    else if  $n > n + 1$ 
    repeat
    until  $n = n + n_{max}$ 
    end
end
Output:  $\Gamma$ 

```

Algoritmo 2 Caracteriza as matrizes de probabilidades por soluções básicas.

```

Input:  $n, \pi_{iest}, \forall i \in \mathbb{K}$ 
    if  $n$ 
        if  $\pi_{iest} \geq 0, \sum \pi_{iest} = 1$  then
            do  $A, b, n_A, n_b$ 
            Compute  $\Pi$ 
            if  $n_A \geq m_A$  then
                Compute  $t$  e  $n_v$  usando (5.2)
                for  $i = 1 : n_v$ 
                     $y \leftarrow 0$ 
                    Compute  $v$ 
                    if  $v \geq 0, v \neq \infty, v \neq -\infty$  then
                        Compute  $y \leftarrow x_{s_i}$  e  $v_c \leftarrow y$ 
                    end
                repeat
            end
            Eliminar colunas iguais
        end
    end
    else erro
    end
    else if  $n > n + 1$ 
    repeat
    until  $n = n + n_{max}$ 
    end
end
Output:  $\emptyset$ 

```

No próximo tópico, temos alguns resultados para o conjunto das taxas Γ e o conjunto de matrizes de probabilidades \wp usando o recurso das soluções básicas.

5.2 Conjunto de matrizes das taxas de transição Γ

O conjunto Γ é computado estabelecendo a condição da matriz A em (5.8) ser linearmente independente, desta forma, é indispensável a eliminação de linha(s) dessa matriz e a imposição de restrições dos tempos médios mínimos. No seguinte exemplo, mostra a *interface* no terminal considerando o vetor estacionário $\pi_{\text{est}} = [0,4 \ 0,6]$ para matrizes das taxas de ordem 2 e tempos médios de permanência mínimo de 2 e 3 segundos.

5.2.1 Exemplo 1 - Caso 2

TAXAS DE TRAN. DO SISTEMA MARKOVIANO CONTÍNUO NO ESTADO ESTACIONÁRIO

----- Dados de entrada -----

Nº de col: 2

pi1 : .4

pi2 : .6

tm1 : 2

tm2: 3

----- Solução -----

taxa_prob{1} =

-0.5000 0.5000

0.3333 -0.3333

taxa_prob{2} =

0 0

0 0

vértices_politopo_taxas_contínuo =

0.5000 0

0.5000 0

0.3333 0

0.3333 0

Elapsed time is 6.276092 seconds.

Portanto, a região politópica Γ , cuja cadeia de Markov a tempo contínuo tenha o mesmo vetor de probabilidades estacionário π_{est} é estabelecido em

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 \\ 0,3333 & -0,3333 \end{bmatrix} \right\}. \quad (5.12)$$

A matriz das taxas incerta Λ será dada por

$$\Lambda = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (1 - \alpha) \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 \\ 0,3333 & -0,3333 \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

onde $0 \leq \alpha \leq 1$.



5.2.2 Exemplo 2 - Caso 3

Neste exemplo, consideramos o vetor $\pi_{\text{est}} = [0,2 \ 0,3 \ 0,5]$ e tempos médios mínimos de permanência de 0,1, 0,2 e 0,5 em segundos. Logo, a região é caracterizada e a matriz incerta Λ de ordem 3 é dada por

$$\Lambda = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3,3333 & 3,3333 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3,3333 & -3,3333 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} + \alpha_5 \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 0 & -3,3333 & 3,3333 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

onde o parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}^5 : \sum_{v=1}^5 \alpha_v = 1$, em que, $\alpha_v \geq 0, \forall v \in \{1,2,3,4,5\}$. No caso contínuo observamos que há um vértice com distribuição determinística ou degenerada.



5.3 Conjunto de matrizes de probabilidades \wp

A região \wp deve ser encontrada considerando que a matriz A de (5.8) tenha posto completo, por isso, devemos eliminar as linhas linearmente dependentes. No cômputo a seguir, fixamos o vetor estacionário $\pi_{\text{est}} = [0,6 \ 0,4]$ para matrizes de probabilidades de ordem 2.

5.3.1 Exemplo 3 - Caso 2

M.PROB. DO SISTEMA MARKOVIANO DISCRETO NO ESTADO ESTACIONÁRIO

----- Dados de entrada -----

Nº de col: 2

pi1 : .6


```

pi2 : .4
----- Solução -----
matriz_prob{1} =

    0.3333    0.6667
    1.0000         0

matriz_prob{2} =

    1    0
    0    1

vértices_politopo_matrizes_prob_discreto =

    0.3333    1.0000
    0.6667         0
    1.0000         0
         0    1.0000
-----
Elapsed time is 0.165942 seconds.

```

A região politópica \wp , cuja cadeia de Markov a tempo discreto tenha o mesmo vetor das probabilidades estacionário π_{est} , é caracterizado por

$$\wp = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,3333 & 0,6667 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (5.15)$$

Portanto, a matriz de probabilidades incerta Π será dada por

$$\Pi = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - \alpha) \begin{bmatrix} 0,3333 & 0,6667 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

em que $0 \leq \alpha \leq 1$.



5.3.2 Exemplo 4 - Caso 3

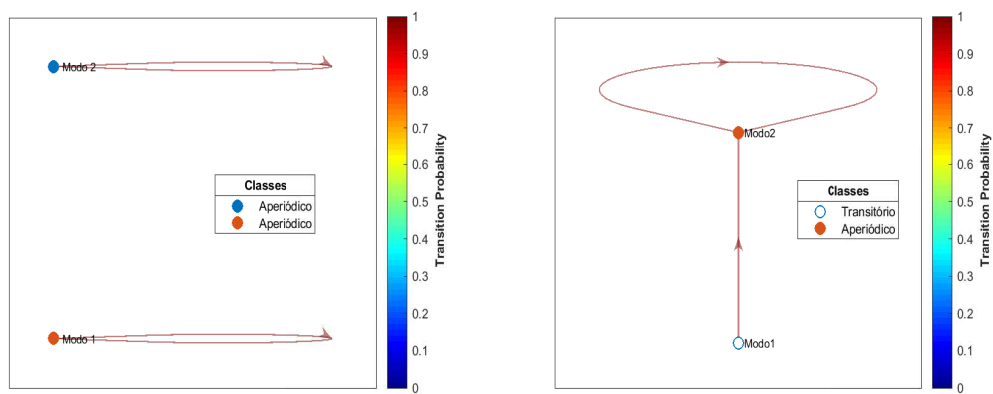
Considerando a região com matriz de probabilidades de ordem 3 e vetor π_{est} de $[0,2 \ 0,3 \ 0,5]$. A região \wp é definida pelos vértices a seguir

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,6667 & 0 & 0,3333 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,6667 & 0,3333 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,3333 & 0,6667 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,6667 & 0 & 0,3333 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,6667 & 0,3333 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} \end{array} \right\}. \quad (5.17)$$



5.4 Análise dos vértices

É interessante analisar os vértices sob a perspectiva da classificação dos modos da cadeia de Markov, pois estão relacionados ao comportamento da cadeia ao longo do tempo, portanto comprovando se de fato chega ao estado estacionário. Utilizando da ferramenta *Econometrics Toolbox* do *Matlab* são ilustrados os dígrafos.



(a) $\Lambda^{(1)}$

(b) $\Lambda^{(2)}$

Figura 6 – Classificação das cadeias de Γ em (5.12).

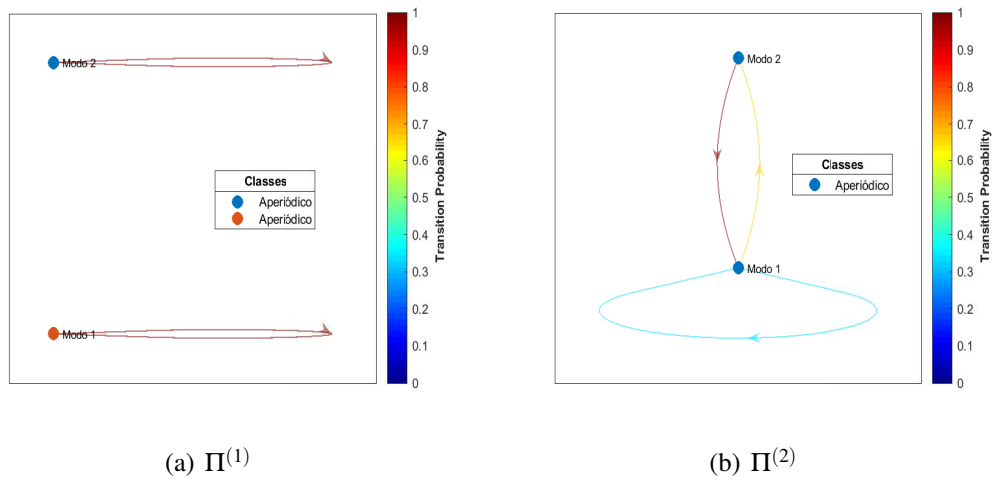


Figura 7 – Classificação das cadeias de ρ em (5.15).

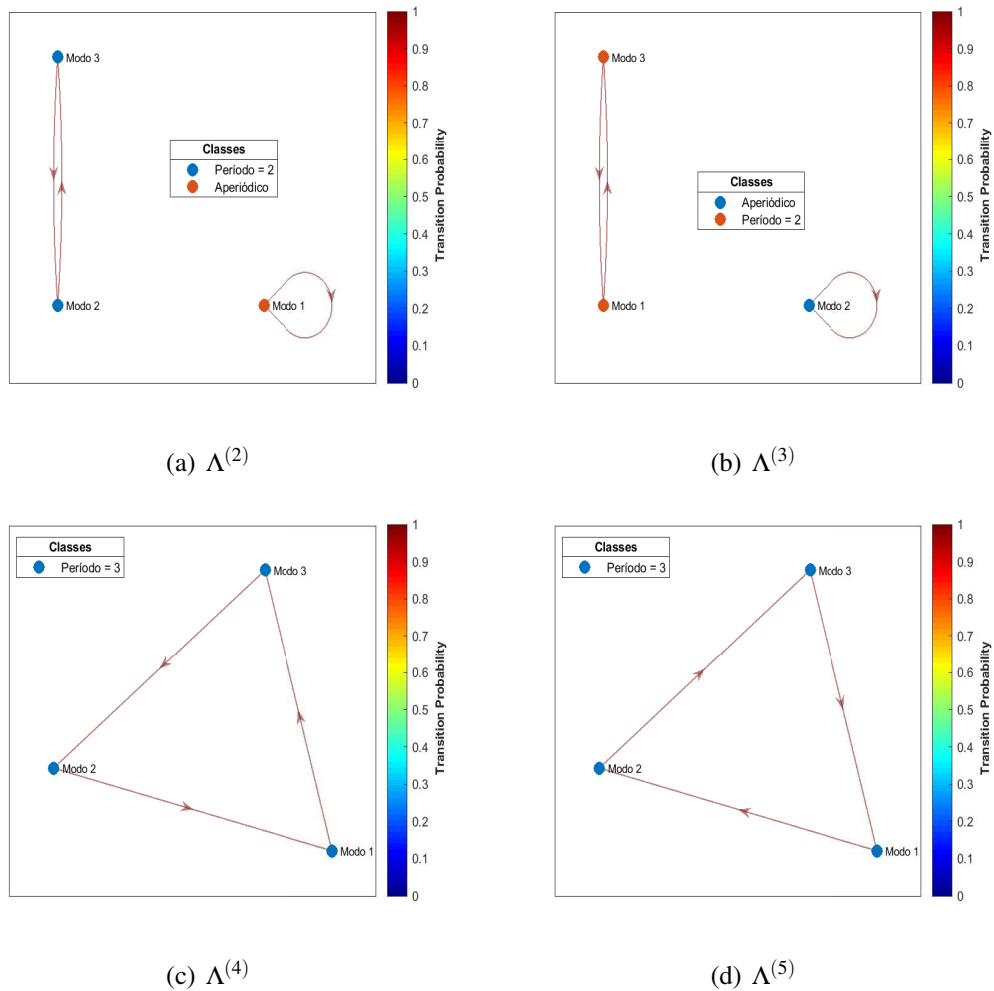


Figura 8 – Classificação das cadeias de Γ em (5.14).

Os diagramas das Figuras 6 e 8 apresentam cadeias de Markov a tempo contínuo e, das Figuras 7, 9 e 10 cadeias a tempo discreto. Visto que, a classificação da recorrência qualifica

o comportamento assintótico de uma cadeia de Markov. É observado o padrão de recorrência positiva que se estende às matrizes do conjunto caracterizado Γ e \wp .

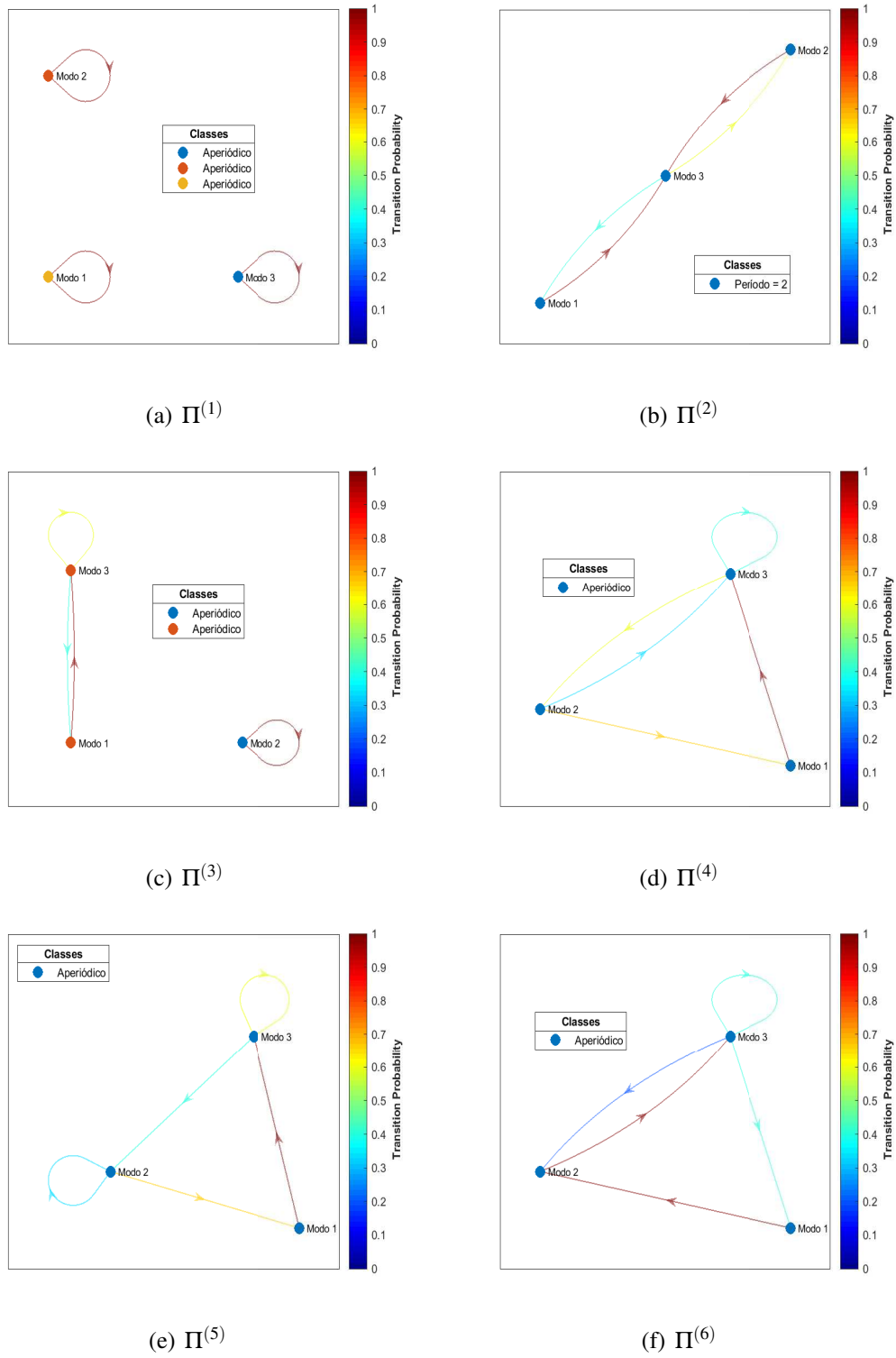


Figura 9 – Classificação das cadeias de \wp em (5.17).

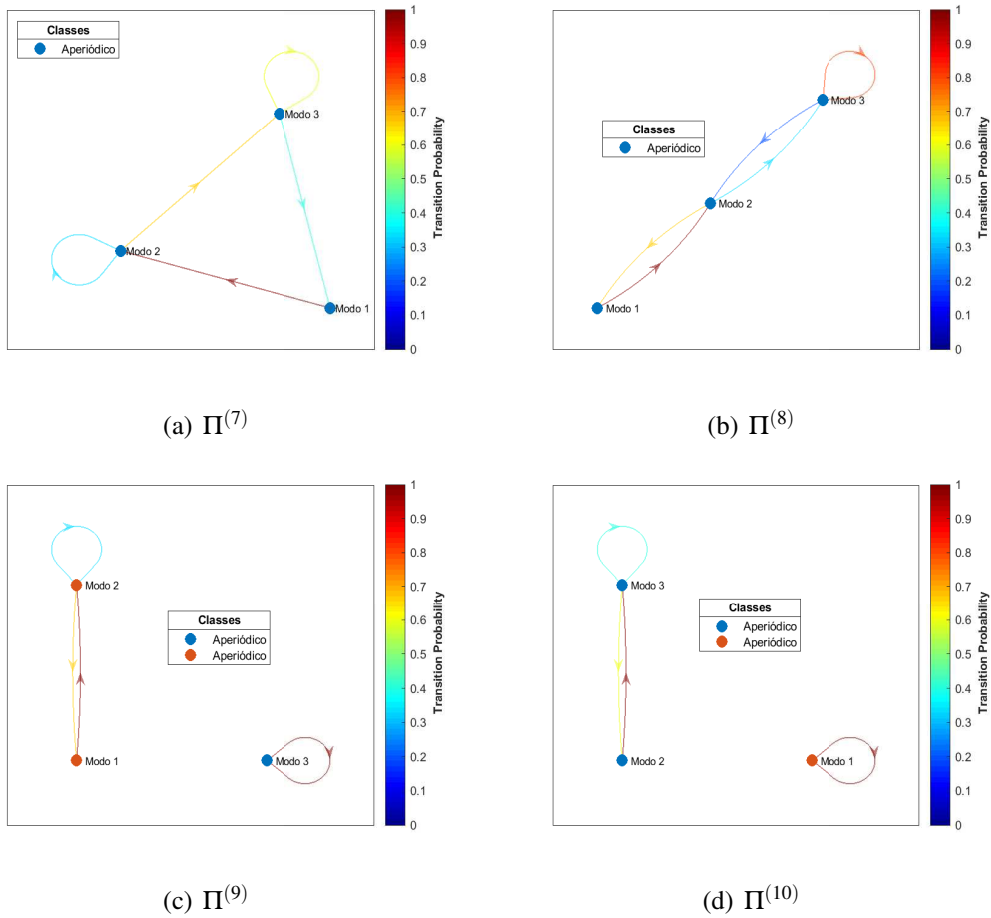


Figura 10 – Classificação das cadeias de \wp em (5.17).

Precisamente, o conjunto (5.12) possui cadeia de Markov redutível, absorvente e recorrente positiva em $\Lambda^{(1)}$ e em $\Lambda^{(2)}$ é composta de uma cadeia irredutível que contém duas classes sendo uma aperiódica e recorrente positiva e a outra transitória. O conjunto (5.15) dispõem de cadeia redutível, absorvente e recorrente positiva em $\Pi^{(1)}$ e ergódica em $\Pi^{(2)}$.

Em (5.14) $\Lambda^{(2)}$ e $\Lambda^{(3)}$ são cadeias redutíveis compostas por duas classes recorrentes positivas sendo uma aperiódica e a outra periódica. Já $\Lambda^{(4)}$ e $\Lambda^{(5)}$ são cadeias irredutíveis que possuem apenas uma única classe com característica de periodicidade e recorrência positiva.

No conjunto (5.17) visualizamos uma cadeia de Markov redutível, absorvente e recorrente positiva em $\Pi^{(1)}$. A cadeia $\Pi^{(2)}$ é irredutível e composta por uma classe periódica e recorrente positiva. De $\Pi^{(4)}$ ao $\Pi^{(8)}$ as cadeias são ergódicas. Em $\Pi^{(3)}$, $\Pi^{(9)}$ e $\Pi^{(10)}$ as cadeias são redutíveis compostas de duas classes aperiódicas e recorrentes positivas.

Em Γ e \wp podemos garantir a existência de uma única distribuição estacionária π_{est} para as cadeias do tipo irredutível e recorrente positiva, pois existe a convergência das probabilidades. Para cadeias do tipo ergódica a sua distribuição estacionária é alcançada e independente da condição inicial. O Teorema 3 e Teorema 4 asseguram a existência da estacionaridade para as cadeias ilustradas do tipo recorrente positiva e periódica, nessa ordem.

6 Aplicações

Neste capítulo mostramos alguns exemplos práticos utilizando da técnica desenvolvida no Capítulo 5. Na Seção 6.1, apresentamos o controle por realimentação de estado do sistema a tempo contínuo de uma grua industrial considerando eventuais falhas no atuador e na Seção 6.2, o controle no sistema massa-mola-amortecedor com falhas na rede. Na Seção 6.3, projetamos o controle a tempo discreto da dinâmica da lateral de uma aeronave não tripulada sujeita a falhas nos atuadores. Para os critérios de desempenho ilustrados no Capítulo 4 e a metodologia proposta nesta dissertação, em todos os exemplos, comparamos através da simulação temporal os desempenhos dos ganhos robustos e ótimos. Para as simulações, utilizamos o *solver* SeDuMi e *parser* Yalmip no *Matlab(R2018a)/Simulink*.

6.1 Grua industrial

O exemplo aborda a adaptação do projeto do controlador via realimentação de estado para o modelo de uma grua industrial (Geromel; Palhares, 2005) e (Cardeliquio, 2014).

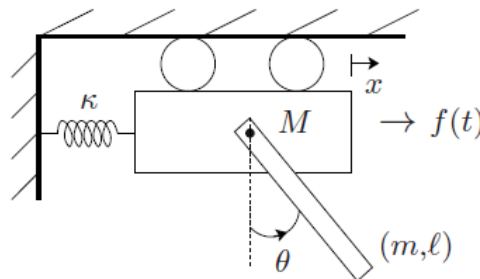


Figura 11 – Grua industrial.

A grua industrial é ilustrada na Figura 11, cujo modelo compõe-se de um pequeno carro de massa M , movendo-se no plano horizontal sob a ação de uma força externa $f(t)$, de uma força de arrasto com coeficiente de atrito viscoso b e de uma força elástica devido a uma mola de constante κ . No centro de massa do carro está ligado um pêndulo de massa m e comprimento ℓ . Este pêndulo, com momento de inércia J_{cm} em relação ao seu centro de massa, também é afetado por uma força de arrasto de coeficiente B .

Supomos que tanto o deslocamento horizontal do carro $x(t)$ quanto o deslocamento angular do pêndulo $\theta(t)$ apresentam pequenas variações. O modelo dinâmico deste sistema pode ser linearizado e descrito por

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x}(t) + (b+B\ell)\dot{x}(t) + \kappa x(t) + (\ell/2)(B\ell\dot{\theta}(t) + m\ddot{\theta}(t)) &= f(t) \\ (J_{cm} + m(\ell/2)^2)\ddot{\theta}(t) + (B\ell^3/3)\dot{\theta}(t) + (\ell/2)(B\ell\dot{x}(t) + m\ddot{x}(t)) + (mg\ell/2)\theta(t) &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Ademais, definimos quatro componentes para o vetor de estado $v(t)$, isto é

$$v(t) = \begin{bmatrix} x(t) & \theta(t) & \dot{x}(t) & \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}^\top. \quad (6.2)$$

O sistema (6.1) pode ser colocado sob a forma $E\dot{v}(t) = Fv(t) + Gf(t)$, onde

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M+m & m\ell/2 \\ 0 & 0 & m\ell/2 & J_{cm} + m(\ell/2)^2 \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\kappa & 0 & -(b+B\ell) & -B\ell^2/2 \\ 0 & -mg\ell/2 & -B\ell^2/2 & -B\ell^3/3 \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top. \quad (6.5)$$

Na simulação, consideramos os valores numéricos de (Cardeliquio, 2014), $M = 1000$ kg, $m = 200$ kg, $b = 2$ Ns/m, $B = 5$ Ns/m², $\ell = 1$ m, $\kappa = 300$ N/m, $g = 9,8$ m/s² e $J_{cm} = 16,67$ kg m². Além disso, o sistema possui dois modos de operação, o modo nominal, para $i = 1$ e modo falha indicado por $i = 2$. As matrizes do sistema são dadas por

$$A_i = E^{-1}F \quad \forall i \in \mathbb{K}, \quad (6.6)$$

$$B_1 = E^{-1}G, \text{ e } B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top. \quad (6.7)$$

O objetivo do sistema de controle a ser projetado é transportar o carro de massa M até a origem com a menor variação possível do ângulo θ , ou seja, trazer o sistema de sua condição inicial $v(0)$ para a origem, controlando a posição angular do pêndulo $\theta(t)$ através da realimentação de estado \mathcal{H}_2 . Nesta dissertação, vamos considerar $J_i = v(0) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ para todo i do sistema (4.1). A saída a ser controlada deve penalizar fortemente o deslocamento

angular do pêndulo, também, devem ser considerados o deslocamento horizontal do carro e a magnitude do sinal de controle a ser aplicado. Portanto, temos

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,01 \end{bmatrix} f(t). \quad (6.8)$$

Em (Cardeliquio, 2014) o tipo de incerteza era como descrito na Seção 4.1.5. A diferença aqui é que, em vez de trabalharmos diretamente com uma região convexa, vamos obtê-la a partir das probabilidades estacionárias. Por isso, consideramos a incerteza na matriz das taxas de transição como do tipo descrito na Seção 4.1.5 e que somente as probabilidades estacionárias π_{est} são conhecidas. Assim, a matriz das taxas de transição para a ocorrência de falhas é incerta, mas pertence a um conjunto convexo de vértices conhecidos. Vamos considerar, uma distribuição estacionária $\pi_{\text{est}} = [0,9 \ 0,1]$, ou seja, o sistema apresenta falha de atuador 10% do tempo, com tempos médios de permanência mínima dados, em segundos, por $t_{m_1} = 15$ e $t_{m_2} = 10$, geramos o conjunto das taxas politópicas Γ

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0,0111 & 0,0111 \\ 0,1000 & -0,1000 \end{bmatrix} \right\}. \quad (6.9)$$

Fechando a malha de controle e aplicando o Teorema 14, obtemos como custo garantido \mathcal{H}_2 o valor de 25,7498 e os seguintes valores para os ganhos de realimentação de estado robusto Kr_i , que minimizam o custo garantido \mathcal{H}_2

$$Kr_1 = \begin{bmatrix} -38,5461 & 137,2039 & -392,6375 & 249,5575 \end{bmatrix}, \quad (6.10)$$

$$Kr_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Em (6.11) traz ganho nulo, pois não faria sentido aplicar ganho de controle quando há falha no atuador. Em seguida, escolhemos uma matriz de taxas Λ_1 que pertence ao conjunto Γ , ou melhor Λ_1 é dada pela combinação convexa politópica dos vértices de Γ , isto é

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} -0,0056 & 0,0056 \\ 0,0500 & -0,0500 \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

e obtemos para a norma \mathcal{H}_2 o valor de 13,8430 e os seguintes valores de ganhos ótimos de realimentação de estado Ko_i que minimizam a norma \mathcal{H}_2

$$Ko_1 = \begin{bmatrix} -17,0192 & 80,3023 & -212,5412 & 218,1750 \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

$$Ko_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Com os ganhos de controle, obtemos o sinal da saída de desempenho $z(t)$ e o esforço de controle $u(t)$ efetuando 2500 iterações da simulação de Monte Carlo para MJLS a tempo contínuo. Nos gráficos, é mostrada a média dessas 2500 realizações em um envelope contendo mais ou menos um desvio padrão.

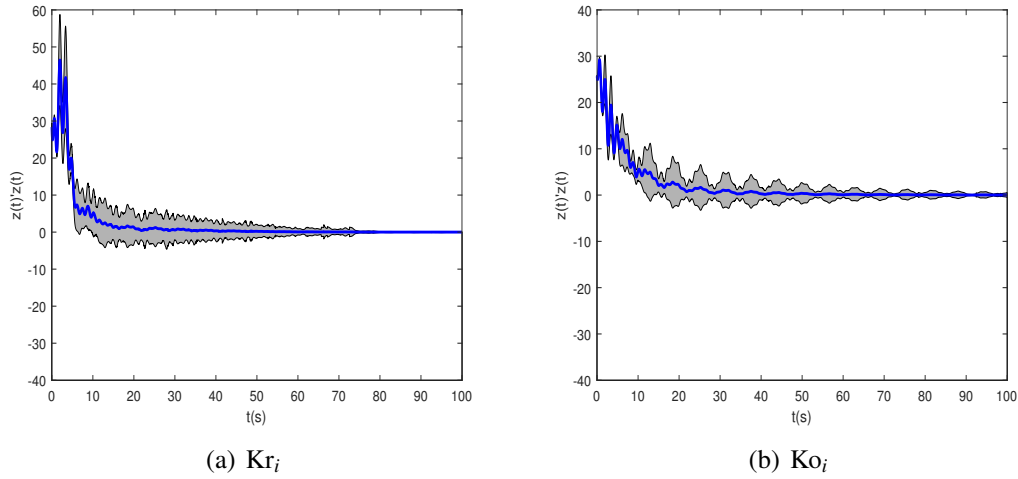


Figura 12 – \mathcal{H}_2 - Resposta do sinal de saída $z(t)$ dada Λ_1 .

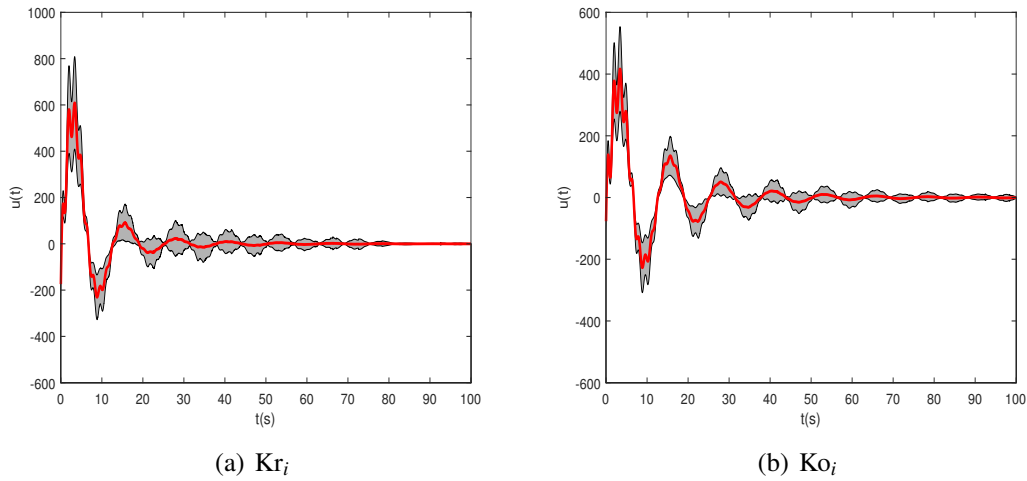


Figura 13 – \mathcal{H}_2 - Resposta do sinal de controle $u(t)$ dada Λ_1 .

Observando as Figuras 12 e 13, a curva em azul corresponde ao valor médio e o desvio padrão em relação a essa média quadrática do sinal esperado da saída e a curva em vermelho representa a média do esforço de controle e o desvio padrão em relação a essa média quadrática. Como esperado, podemos ver que, o desempenho da curva do ganho ótimo teve melhor performance na amplitude do sinal em relação à curva do ganho robusto simulada com

as taxas de Λ_1 . Agora, se considerarmos outra matriz de taxas, tais como a seguir

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} -0,0011 & 0,0011 \\ 0,0100 & -0,0100 \end{bmatrix} \in \Gamma, \quad (6.15)$$

ou qualquer outra matriz que respeitasse o conjunto Γ e efetuarmos novamente a simulação temporal, teremos as Figuras 14 e 15.

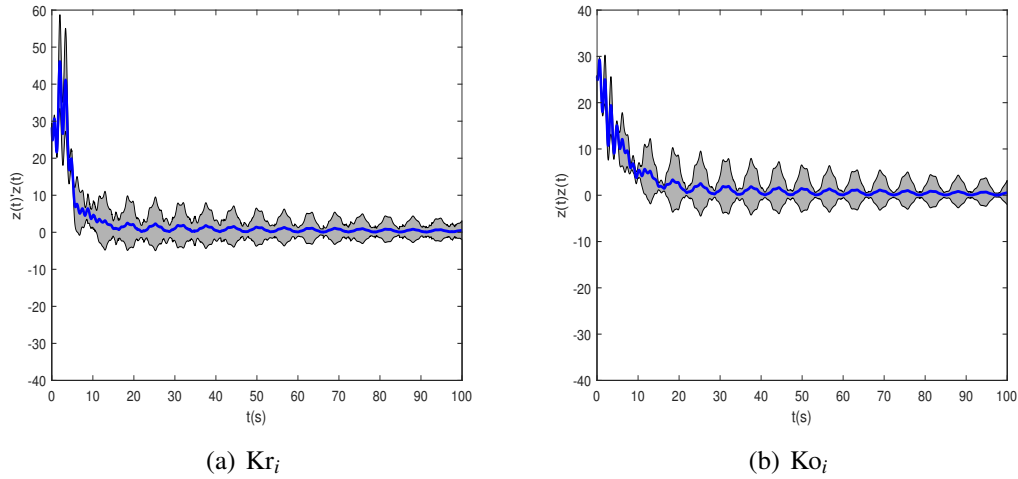


Figura 14 – \mathcal{H}_2 - Resposta do sinal de saída $z(t)$ dada as taxas Λ_2 .

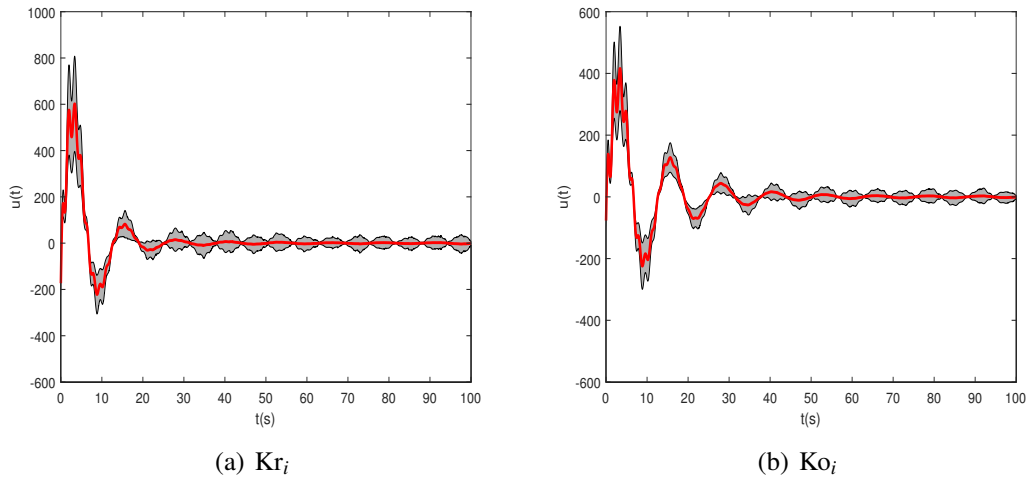


Figura 15 – \mathcal{H}_2 - Resposta do sinal de controle $u(t)$ dada as taxas Λ_2 .

Tabela 3 – Análise de desempenho - Grua industrial.

Ganho K_i	Λ_i	Norma \mathcal{H}_2
Ko_i	Λ_1	13,8430
Ko_i	Λ_2	15,6855
Kr_i	Λ_1	14,7871
Kr_i	Λ_2	14,4758

Na simulação, o desempenho da curva do ganho ótimo apresenta comportamento melhor do que a curva do ganho robusto em relação à amplitude do sinal, porém perde no desvio médio.

Pelos resultados, é evidente que este projeto de realimentação de estado \mathcal{H}_2 , abrange uma maior área de controle quando trabalhamos com taxas politópicas do que com uma única Λ que atua apenas no ponto ótimo. Ainda, o modelo da grua deste exemplo não permite que se tenha uma robutez maior na matriz das taxas, isto fica claro, na imposição de valores altos dos tempos médios de permanência mínimo τ_{\min} nos modos.



6.2 Sistema massa-mola-amortecedor

O modelo consiste em um sistema massa-mola-amortecedor controlado por rede, conforme é ilustrado na figura a seguir.

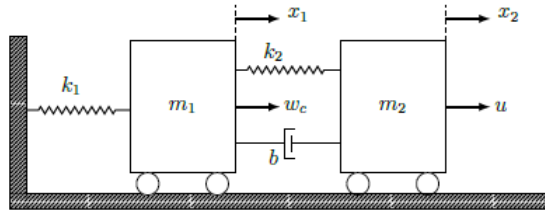


Figura 16 – Sistema massa-mola-amortecedor.

O sistema é composto por dois carros sem fricção, com massas $m_1 = 0,5$ kg e $m_2 = 1,0$ kg, conectados por um amortecedor, $b = 0,2$ Ns/m e uma mola, $k_2 = 7,0$ N/m. O primeiro carro está anexado à parede através de outra mola, $k_1 = 12,0$ N/m. A força $u(t)$ é a entrada de controle atuando no segundo carro e a força $w(t)$ é a entrada exógena atuando no primeiro carro. Todos os dados foram extraídos da referência (Gabriel *et al.*, 2018). Neste trabalho, o sistema é modelado por três modos, o modo $i = 1$ representa a perda total de pacotes na rede, para $i = 2$ é a transmissão parcial e $i = 3$ é o sucesso da transmissão. Neste caso o modelo é dado por

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ (-k_2 - k_1)/m_1 & k_2/m_1 & -b/m_1 & b/m_1 \\ k_2/m_2 & -k_2/m_2 & b/m_2 & -b/m_2 \end{bmatrix} \quad \forall i \in \mathbb{K}, \quad (6.16)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

$$B_2 = 0,5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/m_2 \end{bmatrix}, \quad (6.18)$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/m_2 \end{bmatrix}, \quad (6.19)$$

$$J_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/m_1 & 0 \end{bmatrix}^\top \quad \forall i \in \mathbb{K}. \quad (6.20)$$

Para o cômputo do desempenho \mathcal{H}_2 utilizamos as matrizes a seguir para todo $i \in \mathbb{K}$.

$$C_{zi} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.21)$$

$$D_{zi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top. \quad (6.22)$$

Já, o desempenho \mathcal{H}_∞ é calculado pelas matrizes abaixo para todo $i \in \mathbb{K}$.

$$C_{zi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

$$D_{zi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}^\top, \quad (6.24)$$

$$E_{zi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top. \quad (6.25)$$

Este exemplo está na referência (Gabriel *et al.*, 2018) onde o projeto envolve matriz das taxas de transição conhecida de ordem 2, porém neste trabalho, consideramos que o sistema com 3 modos de operação se encontra em regime permanente com probabilidades estacionárias de $[0,1 \quad 0,3 \quad 0,6]$. Pelo método de soluções básicas encontramos a seguinte região politópica Γ e tempos médios mínimos de permanência $t_{m1} = 3$ s, $t_{m2} = 3,5$ s e $t_{m3} = 6$ s, podemos ver em

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,3333 & 0,3333 \\ 0 & 0,1667 & -0,1667 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1,0000 & 0 & 1,0000 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,1667 & 0 & -0,1667 \end{bmatrix}, \right. \\ \left. \begin{bmatrix} -1,0000 & 0 & 1,0000 \\ 0,3333 & -0,3333 & 0 \\ 0 & 0,1667 & -0,1667 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1,0000 & 1,0000 & 0 \\ 0 & -0,3333 & 0,3333 \\ 0,1667 & 0 & -0,1667 \end{bmatrix} \right\}. \quad (6.26)$$

O Teorema 14 impõe o custo garantido \mathcal{H}_2 de 3,1262 que é assegurado pelos ganhos robustos Kr_i da Tabela 4.

Tabela 4 – Ganhos robusto - \mathcal{H}_2 - Sistema massa-mola-amortecedor.

Kr_i				
Kr_1	0	0	0	0
Kr_2	-1,3235	-16,5032	-2,8026	-13,4892
Kr_3	-1,5397	-14,8865	-1,9706	-9,6055

Pelo Teorema 15, temos o custo garantido \mathcal{H}_∞ de 6,1691 e ganhos robustos Kr_i da Tabela 5.

Tabela 5 – Ganhos robusto - \mathcal{H}_∞ - Sistema massa-mola-amortecedor.

Kr_i				
Kr_1	0	0	0	0
Kr_2	-0,5905	-27,3055	-4,0390	-19,5100
Kr_3	-0,3489	-31,9331	-3,6416	-16,7343

Considerando Λ_1 pertencente a região politópica, tal que

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} -1,0000 & 0,5000 & 0,5000 \\ 0,1666 & -0,3333 & 0,1666 \\ 0,0833 & 0,0833 & -0,1667 \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

A norma \mathcal{H}_2 de 1,2449 e \mathcal{H}_∞ de 0,4480 são calculadas ao utilizar o Teorema 14 e Teorema 15, respectivamente. Os ganhos ótimos Ko_i são mostrados nas Tabelas 6 e 7.

Tabela 6 – Ganhos ótimos - \mathcal{H}_2 - Sistema massa-mola-amortecedor.

Ko_i				
Ko_1	0	0	0	0
Ko_2	-0,5083	-4,3768	-0,8377	-4,1711
Ko_3	-1,0467	-6,3441	-0,7141	-3,7853

Tabela 7 – Ganhos ótimos - \mathcal{H}_∞ - Sistema massa-mola-amortecedor.

Ko_i				
Ko_1	0	0	0	0
Ko_2	3,7199	-6,6215	-0,3030	-4,9551
Ko_3	5,3464	-9,4867	-0,2657	-4,4206

Uma simulação de Monte Carlo com 2500 realizações do MJLS a tempo contínuo foi realizada considerando para o caso da norma \mathcal{H}_∞ a entrada exógena de $w(t) = \sin(t)$ para todo $t \in [0,10)$ e zero caso contrário.

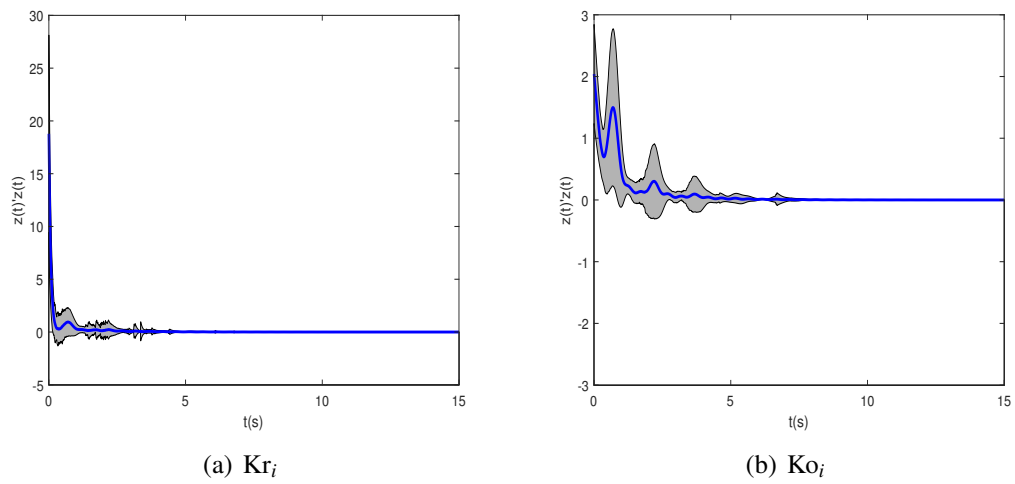


Figura 17 – \mathcal{H}_2 - Resposta da saída controlada $z(t)$ dada Λ_1 .

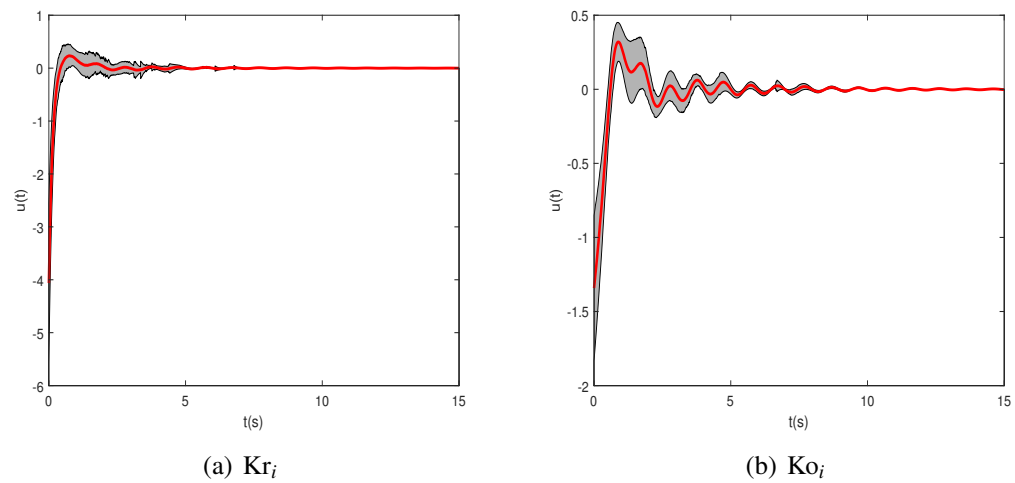


Figura 18 – \mathcal{H}_2 - Resposta do sinal de controle $u(t)$ dada Λ_1 .

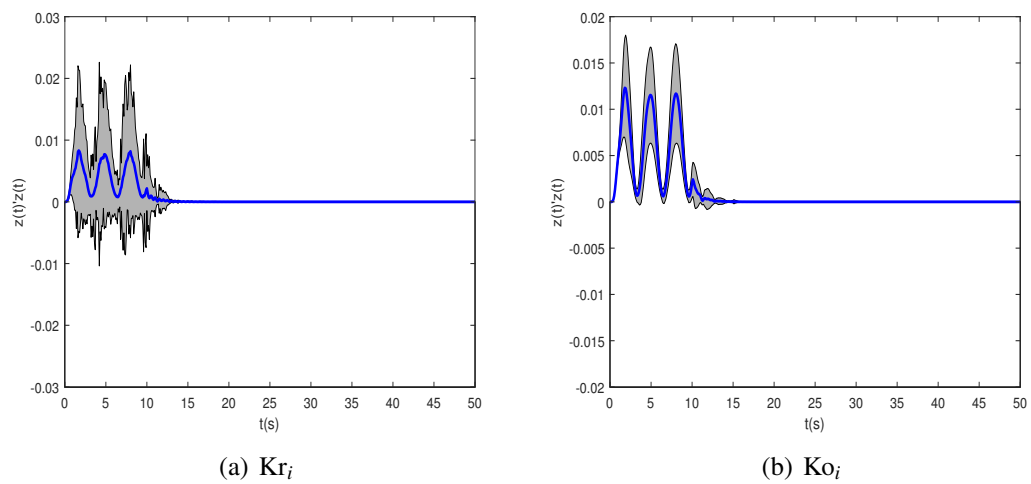


Figura 19 – \mathcal{H}_∞ - Resposta da saída controlada $z(t)$ dada Λ_1 .

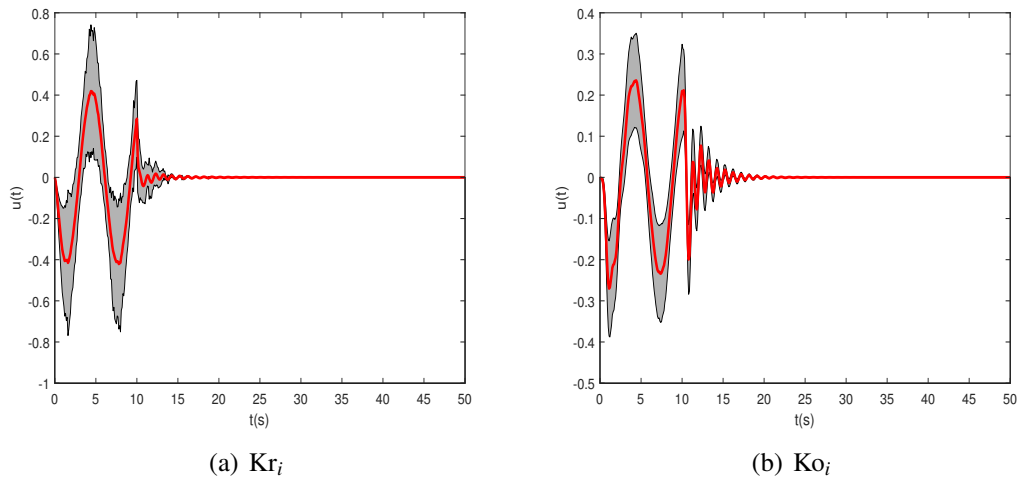


Figura 20 – \mathcal{H}_∞ - Resposta do sinal de controle $u(t)$ dada Λ_1 .

Em todas as figuras, a curva em azul corresponde ao valor médio e ao desvio padrão em relação a essa média quadrática do sinal esperado da saída e a curva em vermelho representa a média do esforço de controle e o desvio padrão em relação a essa média quadrática. Considerando outra matriz $\Lambda_2 \in \Gamma$, tais como

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} -0,1000 & 0 & 0,1000 \\ 0 & -0,1333 & 0,1333 \\ 0,0167 & 0,0667 & -0,0834 \end{bmatrix}. \quad (6.28)$$

Novamente, a simulação de Monte Carlo é realizada com 2500 realizações para fins de comparação.

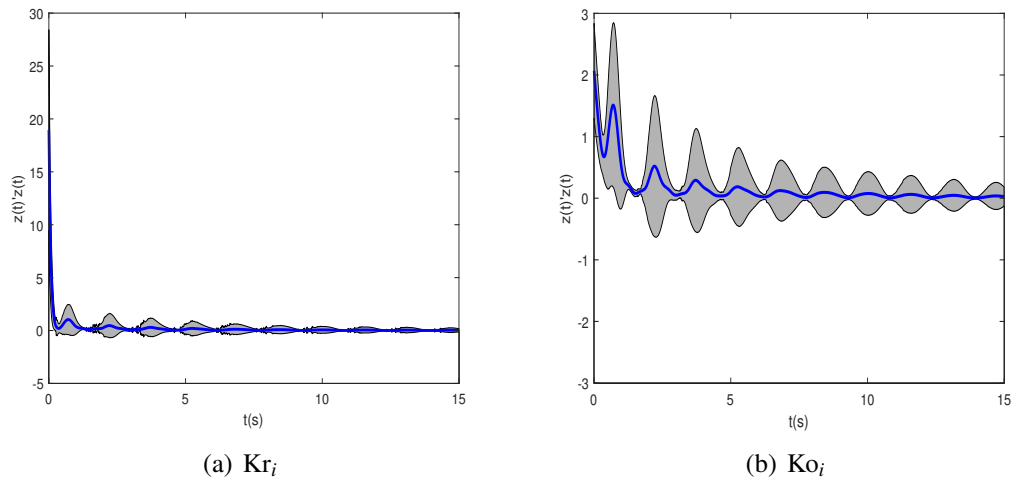


Figura 21 – \mathcal{H}_2 - Resposta da saída controlada $z(t)$ dada Λ_2 .

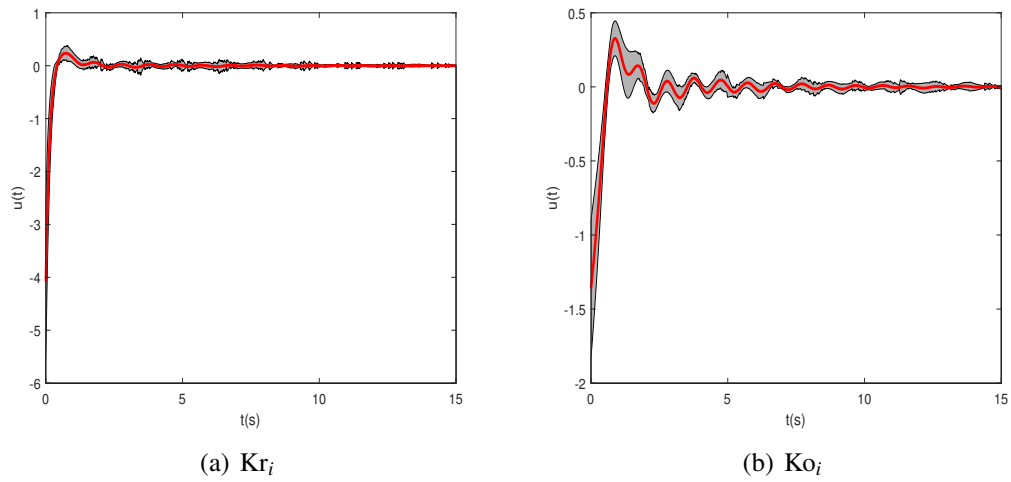


Figura 22 – \mathcal{H}_2 - Resposta do sinal de controle $u(t)$ dada Λ_2 .

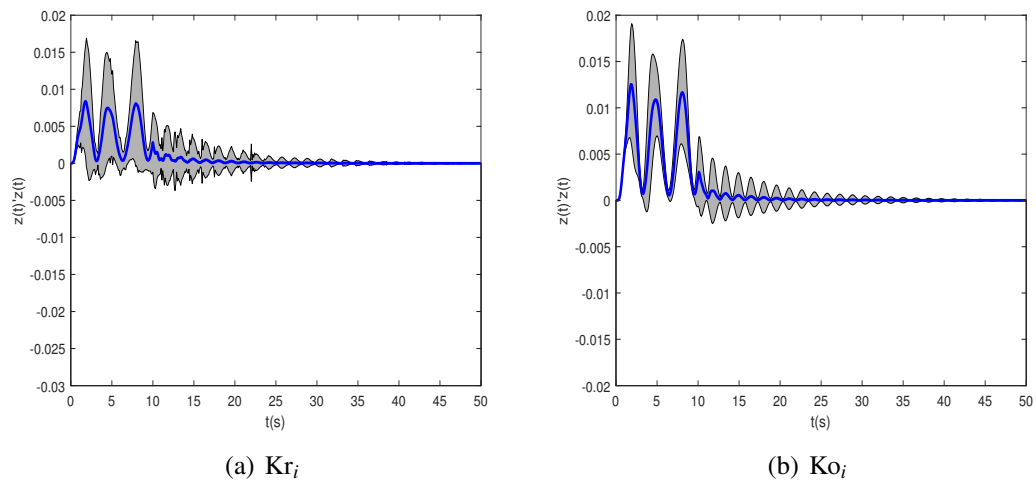


Figura 23 – \mathcal{H}_∞ - Resposta do sinal de saída $z(t)$ dada Λ_2 .

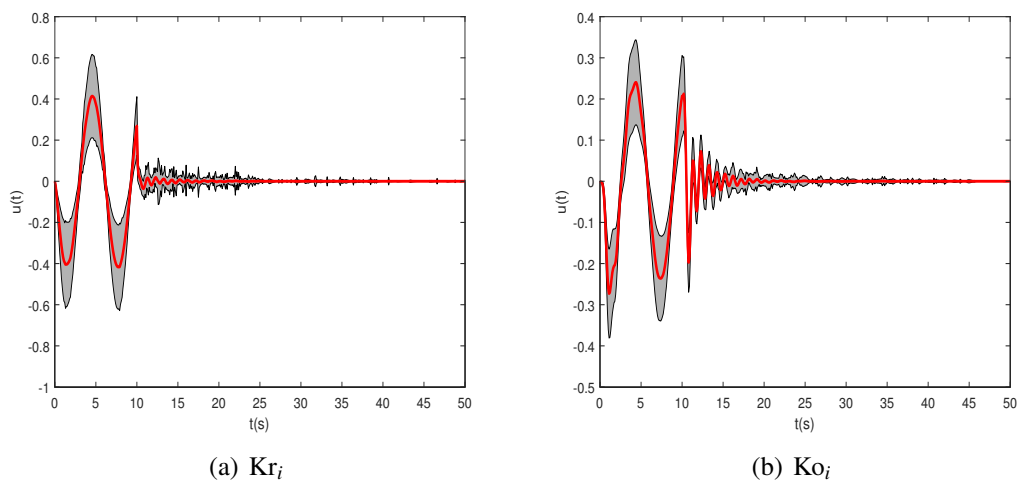


Figura 24 – \mathcal{H}_∞ - Resposta do sinal de controle $u(t)$ dada Λ_2 .

Tabela 8 – Análise de desempenho - Sistema massa-mola-amortecedor.

Ganhos K_i	Λ_i	\mathcal{H}_2	\mathcal{H}_∞
K_{o_i}	Λ_1	1,2449	0,4480
K_{o_i}	Λ_2	1,5514	1,2899
K_{r_i}	Λ_1	1,4849	0,5389
K_{r_i}	Λ_2	1,7419	1,3143

Das simulações, em ambos os teoremas, podemos observar que o desempenho da curva do ganho ótimo teve melhor performance na amplitude do sinal em relação à curva do ganho robusto simulada com as taxas de Λ_1 . Diferentemente da resposta do sinal dada pela simulação com Λ_2 , em que as curvas do ganho robusto obteve melhor resposta em relação à excursão do sinal e do desvio médio.



6.3 Aeronave não tripulada

O exemplo é uma modificação extraída das teses de doutorado (Rodrigues, 2017) e (Oliveira, 2019). Consiste em uma pequena aeronave não tripulada em voo constante. Consideramos a dinâmica direcional lateral cujos atuadores são o estabilizador ou *aileron*, o leme de direção e os lemes de profundidade direito e esquerdo conforme é mostrado na Figura 25. Consideramos que tanto o *aileron* quanto os lemes estejam sujeito a falhas. Desta maneira, podemos considerar que existe um estado nominal, $i = 1$ representando o caso sem falhas, $i = 2$ é o estado no qual o comando aileron não está funcionando e uma terceira situação, $i = 3$, no qual, além da falha do *aileron*, o comando do leme de direção e profundidade são invertidos. Os comandos de controle consistem nas deflexões das superfícies de controle do *aileron* e dos lemes.

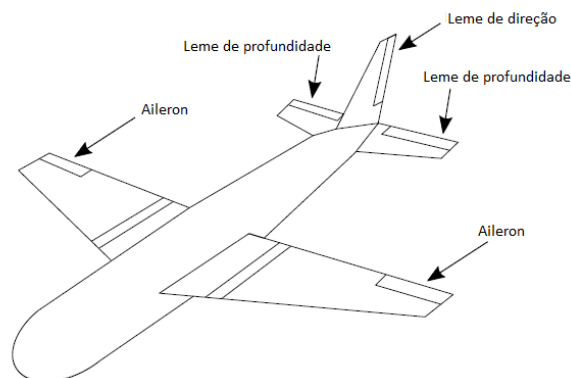


Figura 25 – Aeronave não tripulada.

Consideramos que as variáveis de estado são variações na taxa de rolagem, na taxa de guinada, no ângulo da inclinação lateral e no ângulo de rolagem e os atuadores estão sujeitos a falhas abruptas, logo o seu modelo pode ser determinado pelo sistema markoviano a tempo

discreto dado pelo sistema (4.2), as matrizes do sistema foram discretizadas com tempo de amostragem $T_d = 0,05$ segundos. Todos os dados do sistema estão na referência (Oliveira, 2019). Portanto, a matriz A para todo $i \in \mathbb{K}$ é dada por

$$A_i = \begin{bmatrix} 0,5637 & 0,1133 & -0,6607 & -0,0062 \\ 0,0198 & 0,8368 & 1,0512 & 0,0089 \\ 0,0033 & -0,0450 & 0,9481 & 0,0159 \\ 0,0381 & 0,0073 & -0,0164 & 0,9999 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 2,9735 & -0,0618 \\ -0,1175 & 0,6414 \\ 0,0112 & -0,0165 \\ 0,0812 & -0,0006 \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Além disso, as falhas dos atuadores são modeladas por

$$B_2 = B_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_3 = -B_2. \quad (6.30)$$

A matriz de entrada exógena é apresentada em seguida, para todo $i \in \mathbb{K}$.

$$J_i = \begin{bmatrix} I_4 & 0_{4 \times 2} \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

O objetivo deste exemplo é ilustrar o controle por realimentação de estado \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ na aeronave utilizando dos Teoremas 16 e 17. De (Oliveira, 2019), a probabilidade inicial é tomada como a distribuição estacionária, dada por

$$\pi_{\text{est}} = \begin{bmatrix} 0,3103 & 0,6207 & 0,0690 \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

A matriz de probabilidades para a ocorrência de falha é incerta, mas pertence a um conjunto convexo de vértices conhecidos. As probabilidades politópicas \wp é gerada e dada por π_{est} .

$$\wp = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8888 & 0,1112 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,7776 & 0,2224 & 0 \\ 0 & 0,8888 & 0,1112 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,7776 & 0 & 0,2224 \\ 0,1112 & 0,8888 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,7776 & 0 & 0,2224 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,4999 & 0,5001 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,4999 & 0,3889 & 0,1112 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,3888 & 0,5001 & 0,1112 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0,7776 & 0,2224 \\ 0,4999 & 0,5001 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0,7776 & 0,2224 \\ 0,3888 & 0,6112 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (6.33)$$

As matrizes C_i, D_i, E_i , para todo $i \in \mathbb{K}$, também são tomados de (Oliveira, 2019) para o controle de realimentação de estado \mathcal{H}_2 por

$$C_i = \begin{bmatrix} I_4 \\ 0_{2 \times 4} \end{bmatrix}, D_i = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ I_2 \end{bmatrix} \text{ e } E_i = 0_{6 \times 6}. \quad (6.34)$$

Enquanto, as matrizes para o controle de realimentação de estado H_∞ são dadas por

$$C_i = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E_i = 0_{3 \times 6}. \quad (6.35)$$

Fechando a malha de controle e aplicando o Teorema 16, obtemos como custo garantido \mathcal{H}_2 o valor de 8,8230 e os seguintes valores para os ganhos de realimentação de estado robusto Kr_i que minimizam o custo \mathcal{H}_2 .

$$Kr_1 = \begin{bmatrix} -0,1967 & -0,0852 & 0,3927 & -0,7122 \\ -0,0412 & -0,6054 & -0,1345 & -0,4765 \end{bmatrix}, \quad (6.36)$$

$$Kr_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0840 & -0,6240 & -0,0480 & -0,6328 \end{bmatrix}, \quad (6.37)$$

$$Kr_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0841 & 0,6243 & 0,0478 & 0,6330 \end{bmatrix}. \quad (6.38)$$

As linhas nulas em Kr_2 e Kr_3 são esperadas porque o sinal de controle é perdido para o *aileron* nos dois casos. Também, podemos observar a percepção do controlador em relação à inversão dos sinais de comando do leme de direção e profundidade. Agora, escolhendo uma matriz de probabilidades que pertence ao conjunto \mathcal{P} , tal como

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0,8888 & 0,1112 \\ 0,3888 & 0,5556 & 0,0556 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.39)$$

obtemos a norma \mathcal{H}_2 mínima de 7,4899 e os ganhos ótimos de realimentação de estado Ko_i que minimizam a norma \mathcal{H}_2 .

$$Ko_1 = \begin{bmatrix} -0,1886 & -0,0624 & 0,2390 & -0,4600 \\ -0,0302 & -0,5747 & -0,3465 & -0,1287 \end{bmatrix}, \quad (6.40)$$

$$Ko_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0179 & -0,5691 & -0,3690 & -0,0921 \end{bmatrix}, \quad (6.41)$$

$$Ko_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0031 & 0,5618 & 0,3996 & 0,0447 \end{bmatrix}. \quad (6.42)$$

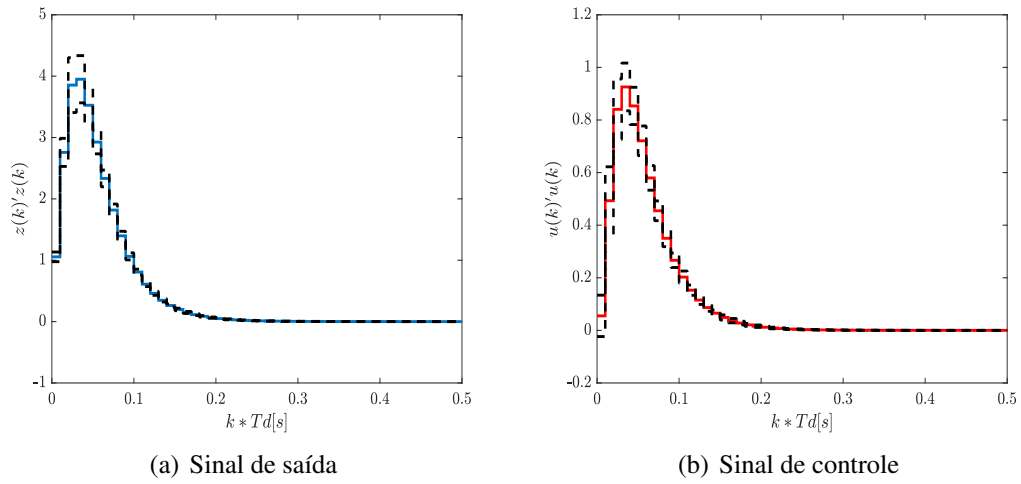


Figura 26 – \mathcal{H}_2 - Resposta do sinal de saída $z(k)$ e de controle $u(k)$ de Kr_i dada Π_1 .

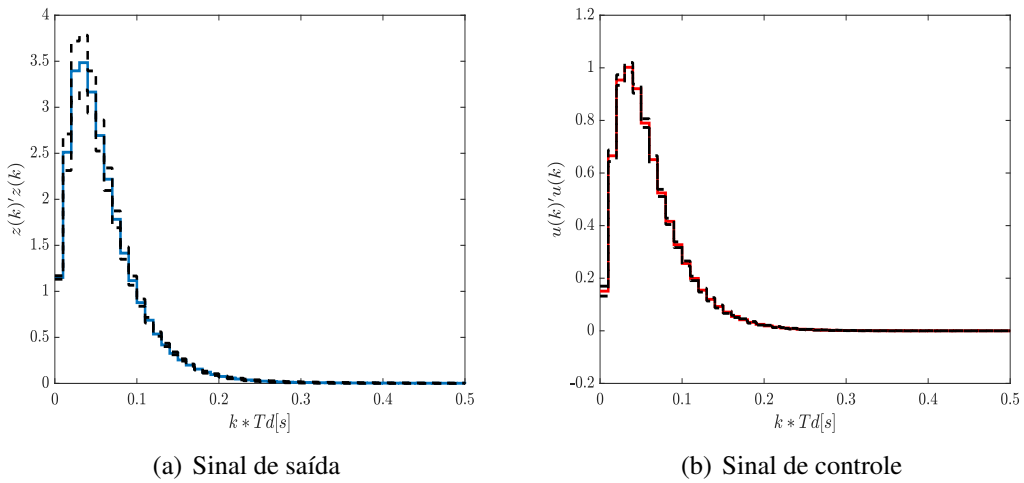


Figura 27 – \mathcal{H}_2 - Resposta do sinal de saída $z(k)$ e de controle $u(k)$ de Ko_i dada Π_1 .

Com os ganhos, obtemos a resposta temporal do sinal de saída e do sinal de controle em função do tempo, $t = kT_d$ em segundos, sendo k o número de amostras. Nas simulações efetuamos 2500 realizações da cadeia de Markov a tempo discreto com tempo de amostragem de 50 ms e 200 amostras. Primeiramente, traçamos a evolução da saída controlada $z(k)$ e do sinal de controle $u(k)$ do ganho robusto e ótimo, dadas as probabilidades que geram Ko_i , Figura 26 e Figura 27.

Das curvas, o traço em azul representa a média quadrática do sinal de saída $z(k)$, bem como o seu desvio para mais e para menos, já a linha em vermelho exibe a média do sinal de controle $u(k)$, bem como o seu desvio para mais e para menos. Analisando as simulações, podemos visualizar que a resposta do ganho ótimo foi melhor que a resposta do ganho robusto, como era esperado já que para àquele conjunto de ganhos é ótimo para as probabilidades de transição consideradas.

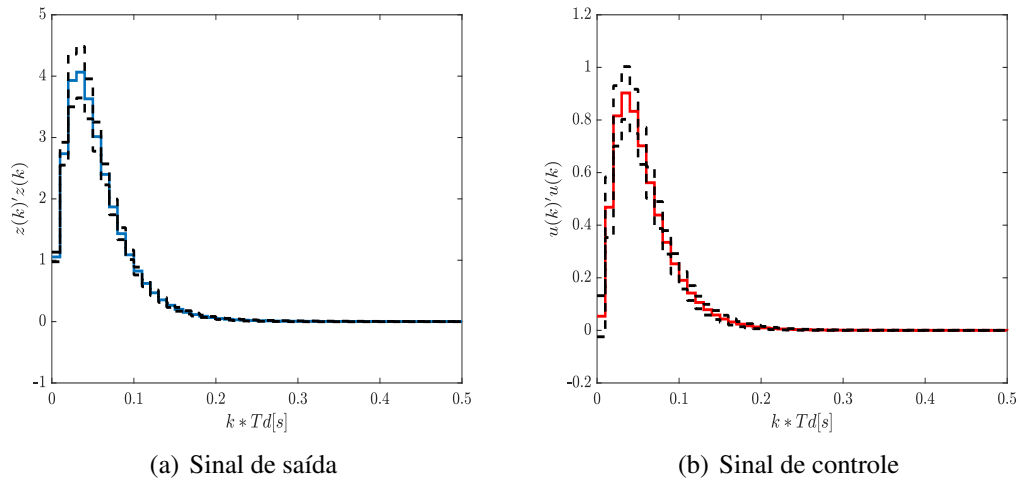


Figura 28 – \mathcal{H}_2 - Resposta do sinal de saída $z(k)$ e de controle $u(k)$ de Kr_i dada Π_2 .

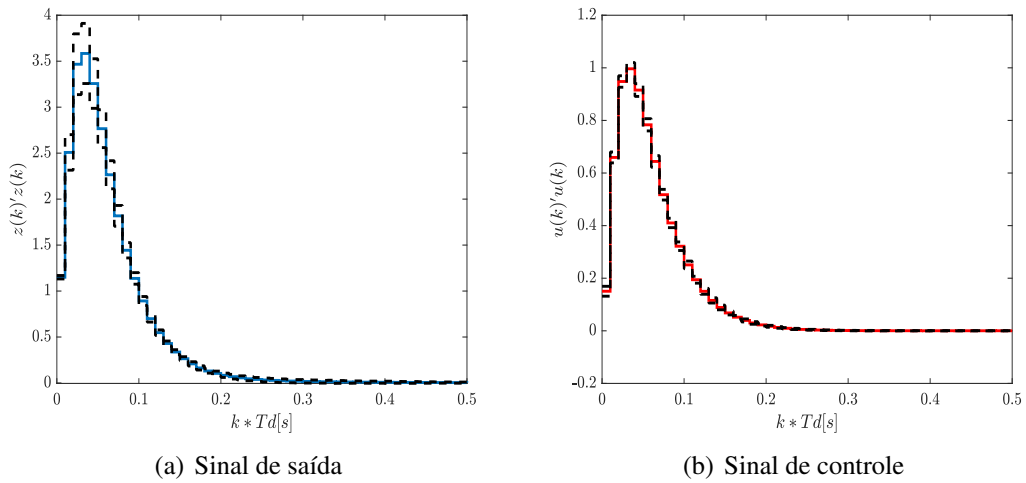


Figura 29 – \mathcal{H}_2 - Resposta do sinal de saída $z(k)$ e de controle $u(k)$ de Ko_i dada Π_2 .

Escolhendo outra matriz de probabilidades pertencente ao conjunto \wp

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} 0,4333 & 0,4778 & 0,0890 \\ 0,2389 & 0,7167 & 0,0445 \\ 0,4000 & 0,4000 & 0,2000 \end{bmatrix} \in \wp. \quad (6.43)$$

Traçamos a evolução da saída $z(k)$ e de controle $u(k)$ do ganho robusto e ótimo, dada a matriz de probabilidades Π_2 . Nas Figuras 28 e 29, a curva em azul representa a média quadrática do sinal de saída $z(k)$ bem como o seu desvio para mais e para menos e a curva em vermelho ilustra o esforço de controle $u(k)$ bem como o seu desvio para mais e para menos. Podemos ver que as curvas do ganho ótimo obteve resultados melhores do que o ganho robusto, porém o desvio médio foi melhor em relação à Figura 29.

Para a realimentação de estado \mathcal{H}_∞ aplicamos o Teorema 17, obtemos como custo garantido \mathcal{H}_∞ o valor de 24,7844 e os seguintes valores para os ganhos de realimentação de estado robusto Kr_i que minimizam o custo \mathcal{H}_∞ .

$$Kr_1 = \begin{bmatrix} -0,2625 & -0,2684 & 2,1238 & -3,0261 \\ -0,0415 & -0,7372 & 0,2757 & -0,3728 \end{bmatrix}, \quad (6.44)$$

$$Kr_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5119 & -1,2291 & 4,1119 & -5,8005 \end{bmatrix}, \quad (6.45)$$

$$Kr_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5291 & 1,2754 & -4,3072 & 5,9972 \end{bmatrix}. \quad (6.46)$$

Utilizando Π_1 , obtemos a norma \mathcal{H}_∞ mínima de 11,6115 e os seguintes valores de ganhos ótimos de realimentação de estado Ko_i que minimizam a norma \mathcal{H}_∞ .

$$Ko_1 = \begin{bmatrix} -0,2298 & 0,5397 & -8,3656 & -1,8012 \\ -0,0274 & -0,5131 & -0,9581 & -0,0383 \end{bmatrix}, \quad (6.47)$$

$$Ko_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0008 & -0,5807 & 0,0497 & 0,1751 \end{bmatrix}, \quad (6.48)$$

$$Ko_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0181 & 0,5415 & 0,6612 & -0,0162 \end{bmatrix}. \quad (6.49)$$

Com os ganhos, obtemos a resposta temporal do sinal de saída e do sinal de controle efetuando 2500 iterações de Monte Carlo da cadeia de Markov a tempo discreto com 200 amostras e tempo de amostragem de 50 ms. A perturbação na inclinação do *aileron* ou dos lemes é escolhido como sendo senoidal aplicado somente em uma janela fixa de 25 amostras de amplitude, conforme a seguir

$$w(t) = \begin{cases} \sin(kT_d), & \text{para } 0 < k \leq 25 \\ 0, & \text{para } k \geq 25 \end{cases}. \quad (6.50)$$

Na Figura 30 e Figura 31 é traçada a evolução da saída controlada $z(k)$ e de controle $u(k)$ em função do tempo kT_d do ganho robusto e ótimo, dada a matriz de probabilidades que gera o ganho ótimo.

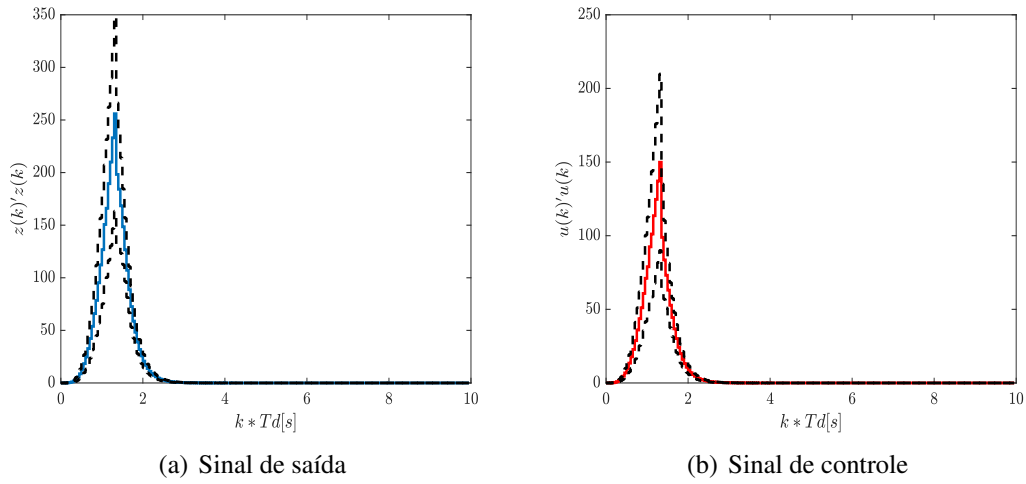


Figura 30 – \mathcal{H}_∞ - Resposta do sinal de saída $z(k)$ e de controle $u(k)$ de Kr_i dada Π_1 .

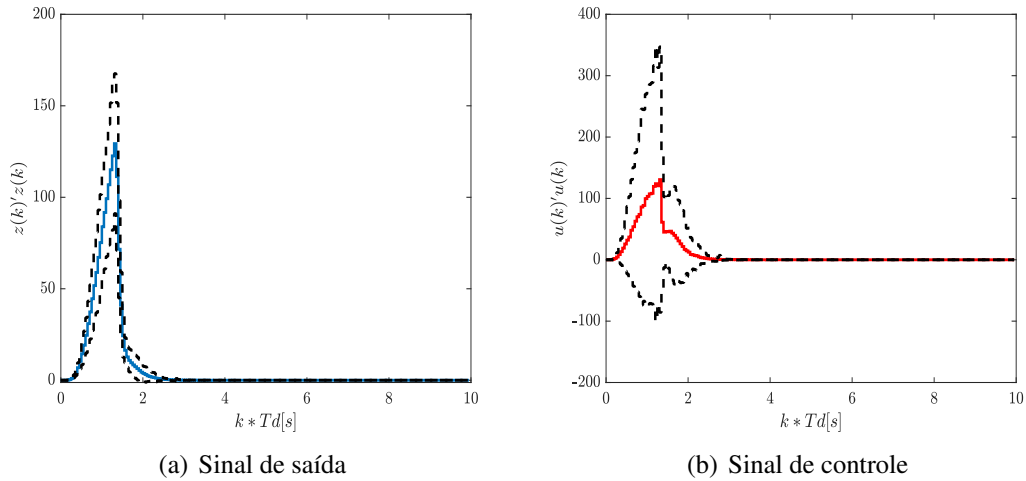


Figura 31 – \mathcal{H}_∞ - Resposta do sinal de saída $z(k)$ e de controle $u(k)$ de Ko_i dada Π_1 .

Sendo que a curva em vermelho representa a média quadrática do sinal de saída $z(k)$ e de controle $u(k)$ bem como o seu desvio para mais e para menos. Podemos visualizar que o ganho ótimo obteve melhor performance do que o ganho robusto.

Dada a matriz $\Pi_2 \in \mathcal{P}$, traçamos a evolução da saída controlada $z(k)$ e do sinal de controle $u(k)$ em função do tempo, temos a Figura 32 e Figura 33. Podemos visualizar que o ganho ótimo obteve resultado satisfatório em relação ao ganho robusto.

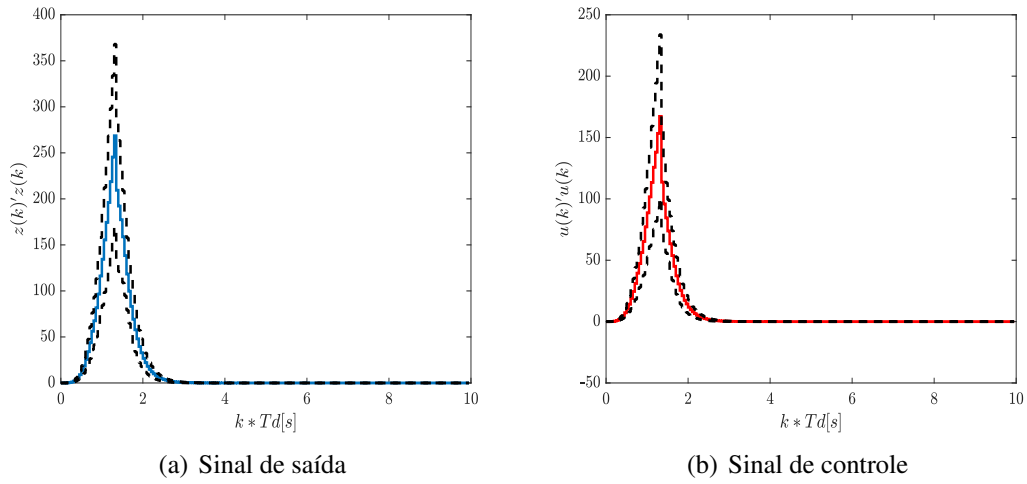


Figura 32 – \mathcal{H}_∞ - Resposta do sinal de saída $z(k)$ e de controle $u(k)$ de Kr_i dada Π_2 .

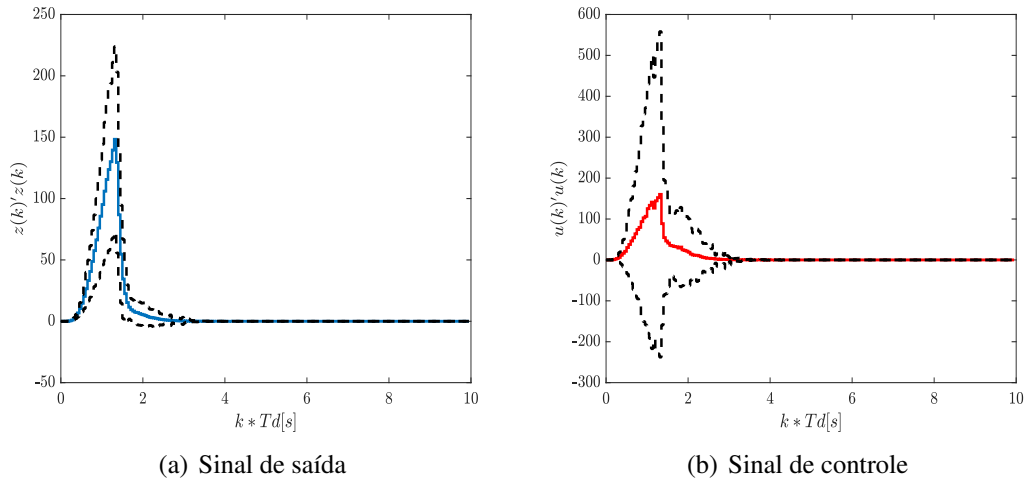


Figura 33 – \mathcal{H}_∞ - Resposta do sinal de saída $z(k)$ e de controle $u(k)$ de Ko_i dada Π_2 .

Tabela 9 – Análise de desempenho - Aeronave não tripulada.

K_i	Π_i	\mathcal{H}_2	\mathcal{H}_∞
Ko_i	Π_1	7,4902	11,6140
Ko_i	Π_2	7,6983	14,0506
Kr_i	Π_1	7,8119	19,9184
Kr_i	Π_2	7,9567	19,7718

Percebemos claramente pelos resultados que os custos calculados têm melhor desempenho para qualquer ganho que esteja contido dentro do politopo \wp , já àquele projetado no seu ponto ótimo tem vantagem em relação àquele ponto, porém não aos demais.



Para projetos de realimentação de estado em MJLS tanto a tempo contínuo quanto a tempo discreto, não é conveniente trabalhar com modelos que possuem pouca robustez na matriz

das taxas ou de probabilidades, pois o sistema poderá não ser controlável. Conforme visto na Seção 6.1, uma forma de contornar este problema em MJLS a tempo contínuo é no ajuste dos tempos de permanência médio mínimo τ_{\min} , desta forma limitando a região politópica. Outra opção, é trabalhar com condições de sínteses de realimentação de estados melhores do que as que foram apresentadas no Capítulo 4.

As simulações utilizando Λ_2 e Π_2 nas aplicações, Grua industrial e Aeronave não tripulada, podemos verificar que a curva do ganho ótimo obteve melhor desempenho do que a curva do ganho robusto, isto faz sentido, pois os teoremas utilizados são apenas suficientes.

Os teoremas sobre filtragem para taxas ou probabilidades desconhecidas tratadas no Capítulo 4 podem aplicar a mesma metodologia vista no Capítulo 5.

7 Conclusões

A presente pesquisa trata dos sistemas com saltos markovianos a tempo contínuo e a tempo discreto, bem como a questão de incertezas nas taxas ou nas probabilidades de transição. Preocupamo-nos em abordar desde o início o conceito de processos markovianos e os tipos de cadeia de Markov, características e suas particularidades. A questão sobre a existência de probabilidades estacionárias, tal como o tempo de permanência nos estados são temas relevantes para o desenvolvimento deste trabalho.

A importância de conhecer esta classe de processo se dá na aplicação de sistemas que possuem mudanças bruscas em suas estruturas, modelados por sistemas com saltos e mais ainda, cujos saltos são modelados por uma cadeia de Markov. Como visto, esses modelos são denominados como sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos (MJLS). Sobre este tema, utilizamos alguns teoremas já propostos na literatura referente a estabilidade, normas, controle por realimentação de estado e a filtragem para MJLS a tempo contínuo e a tempo discreto. Também, discutimos e exemplificamos o controle robusto em MJLS com taxas e probabilidades incertas, com modelagem das incertezas a partir de regiões politópicas.

Para análise e síntese de sistemas com saltos markovianos o texto enfatiza a necessidade de conhecer as taxas e probabilidades de transição, entretanto, quando estas taxas ou matrizes de probabilidades não são conhecidas é necessário aplicar algum método para encontrá-las. A metodologia apresentada utiliza conceitos de programação linear, especificamente a noção de soluções básicas, para caracterizar as probabilidades ou taxas de transição incertas a partir do conhecimento das probabilidades estacionárias.

Esta monografia apresenta a caracterização da região que contém todas as possíveis matrizes de transição associadas a um conjunto de probabilidades estacionárias conhecido, tanto para sistemas MJLS a tempo contínuo quanto a tempo discreto. Os vértices do politopo procurado são obtidos por um programa de computador e exibidos no terminal do *Matlab*.

No Capítulo 6, por simplicidade, resumimos algumas aplicações numéricas do método na síntese de controladores por realimentação de estado \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , tanto a tempo contínuo quanto para o tempo discreto, para taxas e probabilidades de transição de ordem 2 e 3. O mesmo pode ser feito para o caso de filtragem \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ .

7.1 Trabalhos futuros

- Aplicar o método de soluções básicas no controle robusto por realimentação estática e dinâmica de saída para MJLS a tempo contínuo e discreto.

- Empregar a metodologia para o controle robusto e filtragem de MJLS com norma mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.
- Estudar o aumento da complexidade computacional do método proposto para cadeias de Markov de quatro ou mais modos.
- Desenvolver melhores sínteses para a realimentação de estado, realimentação dinâmica de saída, no qual as LMIs sejam afins com relação às taxas ou matriz de probabilidades incertas e aplicar o método desenvolvido em sistemas que se encontram no estado estacionário.

Referências

- Anderson, D. F. Lecture notes on stochastic processes with applications in biology. 2017. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.
- Bazaraa, M. S.; Jarvis, J. J.; Sherali, H. D. *Linear Programming and Network Flows*. [S.l.]: Wiley Interscience, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 59.
- Cardeliquio, C. B. *Controle de Sistemas Markovianos a Tempo Contínuo com Taxas de Transição Incertas*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, 2014. Citado 10 vezes nas páginas 13, 14, 37, 38, 42, 46, 52, 53, 70 e 71.
- Cardeliquio, C. B.; Fioravanti, A. R.; Gonçalves, A. P. C. \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ state-feedback control of continuous-time mjls with uncertain transition rates. In: IEEE. *2014 European Control Conference (ECC)*. [S.l.], 2014. p. 2237–2241. Citado na página 13.
- Cardeliquio, C. B.; Fioravanti, A. R.; Gonçalves, A. P. C. \mathcal{H}_2 output-feedback control of continuous-time mjls with uncertain transition rates. In: IEEE. *53rd IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.], 2014. p. 1097–1102. Citado na página 13.
- Carvalho, L. P.; Oliveira, A. M.; Costa, O. L. V. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ fault detection filter for markovian jump linear systems. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi, v. 2018, 2018. Citado na página 13.
- Cheng, Y.; Hua, M.; Zhang, L. \mathcal{H}_∞ filtering for markovian jump stochastic systems with uncertain transition probabilities. In: IEEE. *2016 35th Chinese Control Conference (CCC)*. [S.l.], 2016. p. 1740–1745. Citado na página 13.
- Costa, O. L. V.; Fragoso, M. D.; Marques, R. P. *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*. [S.l.]: Springer, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 40.
- Costa, O. L. V.; Fragoso, M. D.; Todorov, M. G. *Continuous-Time Markov Jump Linear Systems*. [S.l.]: Springer, 2013. Citado na página 12.
- Costa, O. L. V.; Marques, R. P. Robust \mathcal{H}_2 control for discrete-time markovian jump linear systems. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 81, n. 8, p. 1221–1231, 2008. Citado na página 13.
- Dong, J.; Yang, G. H. \mathcal{H}_2 state feedback control synthesis of continuous-time uncertain markov jump linear systems. In: IEEE. *2007 American Control Conference*. [S.l.], 2007. p. 2417–2421. Citado na página 13.
- Farias, D. P. *Otimização e Controle de Sistemas com Parâmetros Sujeitos a Saltos Markovianos*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Departamento de Telemática, Universidade Estadual de Campinas, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 52.
- Farias, D. P.; Geromel, J. C.; Val, J. B. R.; Costa, O. L. V. Output feedback control of markov jump linear systems in continuous-time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 45, n. 5, p. 944–949, 2000. Citado na página 13.

- Feng, X.; Loparo, K. A.; Ji, Y.; Chizeck, H. J. Stochastic stability properties of jump linear systems. *IEEE transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 37, n. 1, p. 38–53, 1992. Citado na página 36.
- Fioravanti, A. R.; Gonçalves, A. P. C.; Geromel, J. C. \mathcal{H}_2 filtering of discrete-time markov jump linear systems through linear matrix inequalities. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 81, n. 8, p. 1221–1231, 2008. Citado na página 13.
- Fioravanti, A. R.; Gonçalves, A. P. C.; Geromel, J. C. Discrete-time \mathcal{H}_∞ output feedback for markov jump systems with uncertain transition probabilities. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 25, n. 163, p. 894–902, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 52.
- Gabriel, G. W.; Gonçalves, T. R.; Geromel, J. C. Optimal and robust sampled-data control of markov jump linear systems: a differential lmi approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 76.
- Garcia, A. L. *Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2008. Citado na página 17.
- Geromel, J. C.; Palhares, A. G. B. *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos*. [S.l.]: Blucher, 2005. Citado na página 70.
- Gonçalves, A. P. C. *Controle de Sistemas Lineares Discretos com Saltos Markovianos sem Informação Completa dos Estados da Cadeia*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Departamento de Controle Automação, Universidade Estadual de Campinas, 2006. Citado na página 13.
- Gonçalves, A. P. C. *Controle Dinâmico de Saída para Sistemas Discretos com Saltos Markovianos*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Departamento de Controle Automação, Universidade Estadual de Campinas, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 13, 38 e 46.
- Gonçalves, A. P. C.; Fioravanti, A. R.; Geromel, J. C. Filtering of discrete-time markov jump linear systems with uncertain transition probabilities. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 21, n. 6, p. 613–624, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 52.
- Gonçalves, A. P. C.; Fioravanti, A. R.; Geromel, J. C. \mathcal{H}_∞ robust and networked control of discrete-time mjls through lmis. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, v. 349, n. 6, p. 2171–2181, 2012. Citado na página 13.
- Horn, R. A.; Johnson, C. R. *Matrix analysis*. [S.l.]: Cambridge university press, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 31.
- Ji, Y. Stability and control of discrete-time jump linear systems. *Control-Theory and Advanced Technology*, v. 7, n. 2, p. 247–270, 1991. Citado na página 37.
- Morais, C. F.; Braga, M. F.; Lacerda, M. J.; Oliveira, R. C. L. F.; Peres, P. L. D. \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filter design for polytopic continuous-time markov jump linear systems with uncertain transition rates. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Wiley Online Library, v. 29, n. 10, p. 1207–1223, 2015. Citado na página 13.

Nascimento, E. C. S. *Controle \mathcal{H}_∞ para Sistemas Lineares a Tempo Contínuo com Infinitos Saltos Markovianos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2003. Citado na página 12.

Norris, J. R. *Markov chains*. [S.l.]: Cambridge university press, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 31.

Oliveira, A. M. *Análise e Controle de um Sistema Mecânico com Dados Transmitidos através da Rede*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Departamento de Controle Automação, Universidade Estadual de Campinas, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 44.

Oliveira, A. M. *Estimating and Control of Markov Jump Linear Systems with Partial Observation of the Operation Mode*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2019. Citado 5 vezes nas páginas 12, 54, 81, 82 e 83.

Rodrigues, C. C. G. *Control and Filtering for Continuous-Time Markov Jump Linear Systems with Partial Mode Information*. Tese (Doutorado) — Laboratório Nacional de Computação Científica, 2017. Citado na página 81.

Ross, S. M. *Introduction to Probability Models*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 21.

Schroer, B. T.; Noé, F. Efficient bayesian estimation of markov model transition matrices with given stationary distribution. *The Journal of chemical physics*, AIP, v. 138, n. 16, p. 04B612, 2013. Citado na página 14.

Seiler, P.; Sengupta, R. A bounded real lemma for jump systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 48, n. 9, p. 1651–1654, 2003. Citado na página 41.

Shen, M.; Yang, G. H. \mathcal{H}_2 filter design for discrete-time markov jump linear systems with partly unknown transition probabilities. *Optimal Control Applications and Methods*, Wiley Online Library, v. 33, n. 3, p. 318–337, 2012. Citado na página 13.

Silva, L. P. M.; Gonçalves, A. P. C. Filtragem \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ a tempo contínuo. *no prelo*, no prelo, no prelo, n. no prelo, p. no prelo, no prelo. Citado na página 46.

Silveira Júnior, A. A. *Aplicação das cadeias de markov no estudo do controle biológico da planta aquática eichhornia azurea*. Universidade Federal de Goiás, 2014. Citado na página 18.

Todorov, M. G. *Raio de Estabilidade e Controle Robusto de Sistemas Lineares com Saltos Markovianos a Tempo Contínuo*. Tese (Doutorado) — Laboratório Nacional de Computação Científica, Brazil, 2011. Citado na página 13.

Todorov, M. G.; Fragoso, M. D. Output feedback \mathcal{H}_∞ control of continuous-time infinite markovian jump linear systems via lmi methods. *SIAM Journal on Control and Optimization*, SIAM, v. 47, n. 2, p. 950–974, 2008. Citado na página 13.

Todorov, M. G.; Fragoso, M. D. Output-feedback robust control of continuous-time infinite markov jump linear systems. In: IEEE. *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. [S.l.], 2010. p. 6505–6510. Citado na página 13.

- Val, J. A. B. R.; Geromel, J. C.; Gonçalves, A. P. C. The \mathcal{H}_2 control for jump linear systems: Cluster observations of the markov state. *Automatica*, Elsevier, v. 38, n. 2, p. 343–349, 2002. Citado na página 13.
- Yin, G.; Zhang, Q. *Discrete-Time Markov Chains: Two-Time-Scale Methods and Applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2005. Citado na página 12.
- Yin, G. G.; Zhang, Q. *Continuous-Time Markov Chains and Applications: A Two-Time-Scale Approach*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado na página 12.
- Zhang, L.; Boukas, E. K. Discrete-time markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities: \mathcal{H}_∞ filtering problem. In: IEEE. *2008 American Control Conference*. [S.l.], 2008. p. 2272–2277. Citado na página 13.

Apêndices

APÊNDICE A – Trabalhos submetidos pela autora

1. Gabrielle Resende Oliveira, Alim Pedro de Castro Gonçalves e Matheus Souza. "Realimentação de estado \mathcal{H}_2 de sistemas com saltos markovianos com conhecimento apenas das probabilidades estacionárias". XIV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI, Ouro Preto, MG, Brasil, 2019.
2. Gabrielle Resende Oliveira, Lucas Porelli Moreira da Silva e Alim Pedro de Castro Gonçalves. "Realimentação de estado \mathcal{H}_∞ de sistemas com saltos markovianos a tempo discreto com apenas o conhecimento das probabilidades estacionárias". XII Encontro dos Alunos e Docentes do Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial - EADCA, Campinas, SP, Brasil, 2019.